دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

ریاضیات عالی مهندسی

استاد :

جناب آقای دکتر بهار

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(کارشناس ارشد عمران گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی دکترا گرایش سازه North Carolina State University)

پائیز ۱۳۹۱

Subject:

Year: Month: Day:

«بسم الله الرحمن الرحیم»

حمید کاظم

«ریاضیات عالی مهندسی»

جناب آقای دکتر بهار

SAMAND

Subject:

Year: Month: Day:

فهرست مطالب :

۱) جبر خطی

۲) سری فوریه

۳) تبدیل های خطی

۴) معادلات دیفرانسیل پاره ای

۵) حساب تغییرات

مراجع :

Advanced / Applied Engineering Mathmatics
- 1) Kraszig
- 2) Greenberg → (جبرخطی)
- 3) Hildebrand → (جبرخطی (سنگین))
- 4) Mint-U → (دیفرانسیل پاره ای)
- 5) J. M. Reddy → (حساب تغییرات)

امتحان :

- Home Work → 10%
- Mid Term → 40%
- Final → 50%

حمید کاظم

فصل اول

«جبر خطی»

$$\underset{\sim}{U}_n = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$$

$$U, V \in R^n$$

$$\underset{\sim}{V}_n = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

ضرب داخلی:

$$(U,V) = \sum_{1}^{n} u_j \cdot v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

در ضرب داخلی خاصیت جابجایی وجود دارد.

$$(U,V) = (V,U)$$

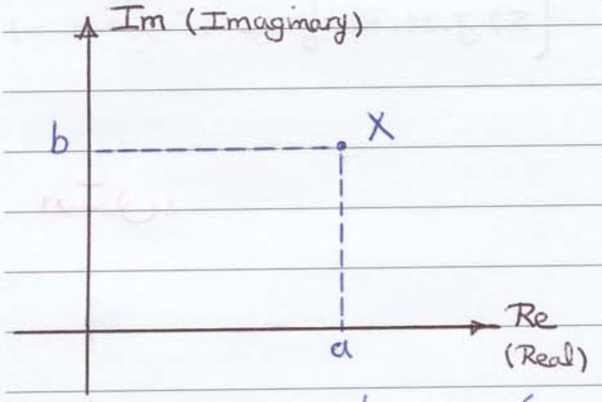
ضرب داخلی بصورت زیر تعریف می گردد.

$$(U,V) = |U||V| \cos\theta$$

طول یک بردار را بصورت نرم آن بردار (Norm) می نامند که بصورت زیر است:

$$\|U\| = \ell(U) = \sqrt{(U,U)}$$

گسترش فضای بردار به اعداد مختلط (Complex number):



$$y^2 = -4 = 4i^2 \rightarrow i = \sqrt{-1}$$

عدد $X = a + bi$

$$\begin{cases} Re(X) = a \\ Im(X) = b \end{cases}$$

تمامی قواعد اعداد موهومی در اعداد حقیقی هم وجود دارد. اما برعکس این مطلب صادق نیست.

مختلط مزدوج $\bar{X} = a - bi$

$X = a + bi$

$\bar{X}$ قرینه X نسبت به محور افقی می باشد.

Subject:
Year: Month: Day:

جمع اعداد مختلط:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_1 + b_1 i \\ X_2 &= a_2 + b_2 i \end{aligned}\right\} \longrightarrow X_1 + X_2 = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{a_3} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3} i = X_3$$

ضرب اعداد مختلط:

$$X_4 = X_1 \cdot X_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

تقسیم اعداد مختلط:

$$X_5 = \frac{X_1}{X_2} = \frac{X_1 * \overline{X_2}}{X_2 * \overline{X_2}} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + b_1 a_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = a_5 + b_5 i$$

نرم اعداد مختلط:

$$\| X \| = \sqrt{X * \overline{X}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

استفاده از مزدوج در عملگرهای مختلف بصورت زیر می‌باشد:

$$\overline{(Z_1 + Z_2)} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$\overline{(Z_1 - Z_2)} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$$

$$\overline{(Z_1 Z_2)} = \overline{Z_1}\, \overline{Z_2}$$

فضای اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم (Complex Space)

بنابراین بردار n مولفه‌ای در فضای اعداد موهومی بصورت $\mathbb{C}^n$ معرفی می‌گردد.

بردار اعداد مختلط

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a_1 + b_1 i \\ \\ \rightarrow a_i + b_i i \\ \\ \rightarrow a_n + b_n i \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1+i \\ -2 \end{bmatrix}$$

بردار روبرو یک بردار اعداد مختلط می‌باشد که قوانین اعداد مختلط بر آن صادق است

ضرب داخلی اعداد مختلط:

$$(U,V)_H = U^T \cdot \bar{V} = \sum u_j \cdot \bar{v}_j$$

هنگامی که یکی از بردارها یا هر دو مختلط باشد با علامت H نشان می‌دهیم که ضرب در فضای Hermity (اعداد مختلط) صورت می‌گیرد و قوانین اعداد مختلط بر آن حاکم است.

تمرین ۱: نشان دهید:

1) $(U,V)_H = (\bar{V}, \bar{U})_H$

2) $\overline{(U,V)_H} = (V,U)_H$

از تمرین بالا می‌توان نتیجه گرفت که خاصیت جابجایی در فضای Hermity وجود ندارد.

$$(U,V)_H \neq (V,U)_H$$

طبق نتیجه تمرین داریم:

$\overline{(U,V)}_H = (V,U)_H \Longrightarrow$ if $(U,V)_H = a + bi \rightarrow (V,U)_H = a - bi$

تمرین ۲: تحقیق کنید که کلمه هرمیتی از کی زده است.

نرم هرمیتی:

نرم هرمیتی همان $l(u)$ است که چون u مختلط است بصورت زیر نمایش داده می‌شود

$$l_H(u) = \sqrt{(u,u)_H} = \sqrt{u^T \cdot \bar{u}} = \sqrt{\sum_1^n u_j \cdot \bar{u}_j}$$

بنابراین نرم هرمیتی یک عدد حقیقی است. نرم هرمیتی طول مطلق یک بردار در فضای Complex است.

زاویه هرمیتی:

$$\cos\theta_H = \frac{(u,v)_H}{l_H(u) \cdot l_H(v)}$$

این کسر یک عدد مختلط است. برای آنکه بصورت عدد حقیقی درآید بصورت زیر عمل می‌کنیم.

$$2\cos\theta_H = \frac{(u,v)_H}{l_H(u) * l_H(v)} + \frac{(v,u)_H}{l_H(u) * l_H(v)} \longrightarrow \cos\theta = \frac{(u,v)_H + (v,u)_H}{2(l_H(v) \cdot l_H(u))}$$

امتحانک: نرم بردار $V = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \longrightarrow V_1 = 1 \qquad V_2 = i$$

چون بردار V دارای اعداد مختلط است پس باید از نرم هرمیتی استفاده شود.

$$l_H(V) = \sqrt{(V,V)_H} = \sqrt{V^T \cdot \bar{V}} \qquad V^T = (1, i) \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow l_H(V) = \sqrt{(1*1) + (i)*(-i)} = \sqrt{2}$$

تعامد در فضای هرمیتی:

u و v در فضای هرمیتی دو بردار متعامد هستند اگر:

$$(u,v)_H = 0 \Longrightarrow (v,u)_H = 0$$

نرمال، واحد یا یکه بودن بردار:

$$l(u) = 1 \;,\; l_H(v) = 1 \longrightarrow$$ بردارهای v ، u یکه و واحد هستند

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

پوشش فضای برداری (زیرفضای برداری):

اگر در مجموعه اعداد حقیقی با برداری مثل U کار کنیم که $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n\} \in R^n$ باشد و داشته باشیم $V = \alpha U$ ، آنگاه می‌توان V های زیادی ساخت که این مجموعه فضای پوشش مجموعه U باشد.

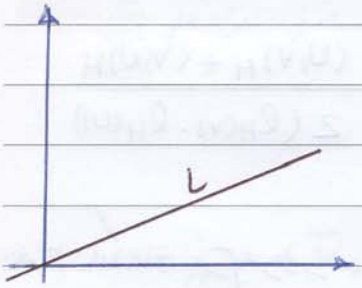
$$V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

مثال: اگر $U = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \in R^2$ باشد، بردار U چه فضایی را پوشش می‌دهد؟

$$V = \alpha U \rightarrow V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_1 = 4\alpha \\ V_2 = 2\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} V_1 \\ \alpha = \frac{1}{2} V_2 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4} V_1 = \frac{1}{2} V_2 \rightarrow V_1 = 2V_2$$

بنابراین تنها بردارهایی پوشش داده می‌شوند که رابطه فوق در آن‌ها برقرار باشد.



بردار U می‌تواند فضایی از R^2 را پوشش دهد که بر روی خط L قرار داشته باشد و یا به عبارت دیگر $V_1 = 2V_2$ باشد.

مثال: اگر $U = \{u_1, u_2\}$ باشد که $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $u_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$ اختیار شوند، مجموعه U چه فضایی از R^2 را پوشش می‌دهد؟

$$V = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} -8 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4\alpha_1 - 8\alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow V_1 / V_2 = 2$$

پس مجموعه بردار u_1 ، u_2 بخشی از فضای R^2 را پوشش می‌دهد که $V_1 = 2V_2$ باشد.

مثال: اگر $u_1 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$ ، $u_2 = \begin{Bmatrix} -8 \\ -4 \end{Bmatrix}$ ، $u_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$ باشد مجموعه U چه فضایی از R^2 را پوشش می‌دهد؟

این مثال نشان می‌دهد که تعداد بردار در کامل پوشش دادن یک فضا موثر نیست.

مثال: اگر $u_1=\begin{Bmatrix}5\\1\end{Bmatrix}$ و $u_2=\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}$ باشد، مجموعه U چه فضایی از R^2 را پوشش می دهد؟

$$V=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$$

$$\begin{cases} V_1 = 5\alpha_1+\alpha_2 \\ V_2=\alpha_1+3\alpha_2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 3/14\, V_1 - 1/14\, V_2 \\ \alpha_2 = -1/14\, V_1 + 5/14\, V_2 \end{matrix}$$

جای V_1 و V_2 هر عددی بگذاریم α_1 و α_2 بدست می آید. پس محدودهٔ خاصی نداریم. بنابراین u_1 و u_2 کل فضای R^2 را پوشش می دهند.

مثال: $u_1=\begin{Bmatrix}5\\1\end{Bmatrix}$ و $u_2=\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}$ و $u_3=\begin{Bmatrix}2\\2\end{Bmatrix}$ می باشد. مجموعه U چه فضایی از R^2 را پوشش می دهد؟

$$V=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3$$

$$\begin{cases} V_1 = 5\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 \\ V_2=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3/14\, V_1 - 1/14\, V_2 - 4/14\,\alpha_3 \\ \alpha_2 = -1/14\, V_1 + 5/14\, V_2 - 3/14\,\alpha_3 \end{cases}$$

مجموعه $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ فضای برداری R^2 را کاملاً پوشش می دهد چون به ازای هر عددی از V_1 و V_2 می توان جوابی پیدا کرد اما ضرایب α_1 و α_2 و α_3 منحصر بفرد مستقل نیستند که ما دوست نداریم با فضای غیر مستقل کار کنیم.

نتایج:
1) لزوماً تعداد بیشتر بردار که فضای بیشتری را پوشش می دهد.
۲) برای تعریف R^N نیازی به بیش از N بردار نیست چراکه منحصر بفرد بودن از بین می رود.

همانطور که می دانیم نحوه تعریف برداری با n مولفه در فضای R^n بصورت زیر است:

$$V=\begin{Bmatrix}V_1\\V_2\\ \vdots \\ V_n\end{Bmatrix} \in R^n$$

مثال: اگر $U=\{u_1,u_2\}$ باشد بطوریکه $u_1=\begin{Bmatrix}-1\\0\\2\end{Bmatrix}$ و $u_2=\begin{Bmatrix}1\\2\\2\end{Bmatrix}$ تعریف شود، مجموعه U در

Subject:
Year: Month: Day:

R^3 به فضای را پوشش می‌دهد؟

$$V=\begin{Bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{Bmatrix}=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=\begin{Bmatrix}\alpha_1-\alpha_2\\2\alpha_1\\2\alpha_1+2\alpha_2\end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}V_2\\\alpha_2=-V_1+\frac{1}{2}V_2\\0=3V_1-2V_2+V_3\end{cases}$$

مجموعه بردار u_1 و u_2 در فضای R^3 فقط بخشی از این فضا را پوشش می‌دهد که رابطه سوم بین مولفه‌های بردار V برقرار باشد.

تمرین ۳: اگر $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ باشد و

$$u_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix},\ u_2=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\\1\end{Bmatrix},\ u_3=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\1\end{Bmatrix},\ u_4=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\1\end{Bmatrix}$$

تعریف شود، مجموعه U در R^4 به فضای را پوشش می‌دهد؟

* در فضای R^n اگر مجموعه $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ باشد، در صورتیکه $m>n$ باشد جواب منحصر به فرد بدست آید در حالیکه می‌توان فضا را پوشش داد (ولی عناصر مجموعه اضافی است) و در حالتیکه $m<n$ باشد نمی‌توان تمام فضا را پوشش داد.

استقلال خطی بردارها:

اگر $U=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ متعلق به فضای R^n داشته باشیم، هرگاه ترکیب خطی از این بردارها برابر صفر باشد $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n=0$ این مجموعه را مستقل خطی می‌نامیم اگر $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ بدست آید. در غیر اینصورت مجموعه وابسته خطی است.

مثال: استقلال خطی مجموعه $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ را تحقیق نمایید.

$$u_1=\begin{Bmatrix}2\\0\\1\\-3\end{Bmatrix}\quad u_2=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\\1\end{Bmatrix}\quad u_3=\begin{Bmatrix}2\\2\\3\\0\end{Bmatrix}$$

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0\rightarrow\begin{cases}2\alpha_1+2\alpha_3=0\\\alpha_2+2\alpha_3=0\\\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0\\-3\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}\rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

مجموعه U مستقل خطی است.

حمید کاظم

* در فضای R^n یا مجموعه $U=\{u_1,u_2,\dots,u_r\}$ ، اگر $(r>n)$ باشد مجموعه لزوماً وابسته خطی است ، در غیر اینصورت $(r\leq n)$ باید در مورد استقلال خطی بودن U تحقیق شود.

مثال: استقلال خطی مجموعه $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ را بررسی نمایید.

$$u_1=\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}\qquad u_2=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\qquad u_3=\begin{Bmatrix}1\\1\\2\end{Bmatrix}\qquad u_4=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}$$

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\alpha_4u_4=0$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \longrightarrow \alpha_2=-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4\\ \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=0\end{cases}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4+\alpha_3+2\alpha_4=0\\ \alpha_1-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4+2\alpha_3+\alpha_4=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}-\alpha_1+\alpha_4=0\\ \alpha_3=0\end{cases}$$

$$\longrightarrow \alpha_1=\alpha,\quad \alpha_4=\alpha,\quad \alpha_2=-2\alpha,\quad \alpha_3=0$$

پس مجموعه U وابسته خطی است.

تمرین ۴: از چهار بردار بالا سه بردار را پیدا کنید که مستقل خطی باشند.

دترمینان گرام (Gramian):

$$G=\begin{vmatrix}(u_1,u_1) & (u_1,u_2) & \cdots & (u_1,u_m)\\ (u_2,u_1) & (u_2,u_2) & \cdots & (u_2,u_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (u_n,u_1) & (u_n,u_2) & \cdots & (u_n,u_m)\end{vmatrix}$$

اگر حاصل دترمینان گرام برابر صفر باشد، مجموعه U وابسته خطی است.

$G=0 \longrightarrow$ وابسته خطی

اثبات این مطلب بصورت زیر است:

اگر ماتریس A را بصورت زیر تعریف نمائیم:

$$A = \begin{bmatrix} (u_1,u_1) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & (u_n,u_m) \end{bmatrix}$$

درصورتی مجموعه U مستقل خطی است که:

$$A\cdot\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = 0$$

آنگاه:

$$A^{-1}\cdot A\cdot\alpha = A^{-1}\cdot 0$$

اگر ماتریس A وارون پذیر باشد آنگاه:

$$\alpha = 0$$

وارون پذیر بودن ماتریس A مستلزم صفر نشدن دترمینان A است. پس اگر دترمینان ماتریس A صفر شد مجموعه U وابسته خطی خواهد بود.

تمرین ۵: استقلال خطی مجموعه $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ را تحقیق نمایید (به کمک دترمینان گرام)

$$u_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad u_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

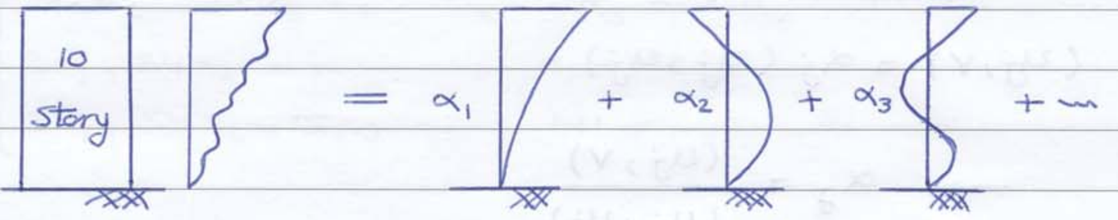
قضیه ۸: در فضای برداری S، مجموعه محدود $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ یک مجموعه پایه برای S محسوب می‌شود اگر هر بردار V در این فضا بتواند بصورت یک لیست منحصر بفرد به صورت زیر نمایش داده شود.

$$V = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_mu_m = \sum_{1}^{m} \alpha_j u_j$$

قضیه ۸: در فضای برداری S یک مجموعه محدود $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ یک مجموعه پایه برای S محسوب می‌شود اگر و تنها اگر مستقل خطی باشد و S را پوشش دهد.

* فرض کنید $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ مجموعه‌ای متعلق به فضای R^n باشد که در آن $m<n$ می‌باشد. اگر در این مجموعه m عضوی، r عضو مستقل خطی باشند $(r<m)$ آنگاه بعد فضای برداری پوشش داده شده، r می‌باشد و بقیه $m-r$ بعد بصورت ترکیب خطی از r عضو مستقل خطی قابل محاسبه است. همچنین $d=n-r$ را کاستی یا پوچی مجموعه پایه می‌نامند.

یک سازه ۱۰ طبقه را در نظر بگیرید.



این مدها مستقل هستند و این مجموعه مستقل خطی است. در مهندسی عمران برای رسیدن به دقت مورد نظر بررسی چند مود اول کفایت می‌کند.

مثال: ضرایب α_i مربوط به بردار V در قضیه قبل را محاسبه نمایید.

$$V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m$$

دو طرف تساوی را در u_i ضرب داخلی می‌نماییم.

$$(u_1, V) = \alpha_1 (u_1, u_1) + \alpha_2 (u_1, u_2) + \alpha_3 (u_1, u_3) + \dots + \alpha_m (u_1, u_m)$$
$$(u_2, V) = \alpha_1 (u_2, u_1) + \alpha_2 (u_2, u_2) + \alpha_3 (u_2, u_3) + \dots + \alpha_m (u_2, u_m)$$
$$\vdots$$
$$(u_m, V) = \alpha_1 (u_m, u_1) + \alpha_2 (u_m, u_2) + \alpha_3 (u_m, u_3) + \dots + \alpha_m (u_m, u_m)$$

بدین ترتیب ضرایب بردار u و V بصورت اسکالر در می‌آیند که می‌توان چند معادله چند مجهول را حل و به α ها پرداخت.

تعامد:

تعریف: مجموعه $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ (مجموعه دارای پایه) مجموعه متعامد نامیده می‌شود اگر اعضای این مجموعه در رابطه زیر صدق کنند.

$$(u_i, u_j)_{i \neq j} = 0$$

بردار V را بر اساس این مجموعه تعریف می‌کنیم:

$$V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$(u_j, V) = \alpha_1 \cancel{(u_j, u_1)} + \cdots + \alpha_j (u_j, u_j) + \cdots + \alpha_n \cancel{(u_j, u_n)}$$

$$\rightarrow (u_j, V) = \alpha_j (u_j, u_j)$$

$$\rightarrow \alpha_j = \frac{(u_j, V)}{(u_j, u_j)}$$

بردارهای پایه متعامد:

مجموعه $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ مجموعه بردارهای پایه متعامد را تشکیل می دهد اگر مستقل خطی باشد و ضرب داخلی هر دو بردار غیر همنام صفر شود.

$$V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

$$\rightarrow V = \sum_{j=1}^{n} \frac{(u_j, V)}{(u_j, u_j)} u_j$$

مثال: سه بردار e_1 و e_2 و e_3 را در نظر بگیرید. کنترل کنید که آیا در فضای R^4 بردار پایه هستند یا خیر.

۱) روش دترمینان گرام:

$$e_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad e_2 = \begin{Bmatrix} -6 \\ 42 \\ 24 \\ 54 \end{Bmatrix} \quad e_3 = \begin{Bmatrix} 21 \\ -21 \\ 0 \\ -15 \end{Bmatrix} \quad (e_1, e_1) = |e_1| * |e_1| * \cos 0$$

ابتدا دترمینان گرام را تشکیل می دهیم.

$$G = \begin{vmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 138 & 33 \\ 138 & 5242 & -1818 \\ 33 & -1818 & 1107 \end{vmatrix} = 0$$

$$(e_1, e_1) = (3^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2) = 17$$

مجموعه وابسته خطی است و نمی تواند بردار پایه در فضای R^4 باشد.

۲) روش سنتی:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 6\alpha_2 + 21\alpha_3 = 0 & (1) \\ 42\alpha_2 - 21\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = 2\alpha_2 & (2) \\ 2\alpha_1 + 24\alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -12\alpha_2 & \\ 2\alpha_1 + 54\alpha_2 - 15\alpha_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1),(2),(3) \rightarrow -36\alpha_2 - 6\alpha_2 + 42\alpha_2 = 0 \rightarrow 0 = 0$

پس مجموعه مستقل خطی نمی باشد و وابسته خطی است.

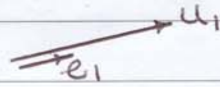
متعامدسازی بردارهای پایه (گرام-اشمیت) 8

مجموعه $U=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است. می خواهیم مجموعه متعامد نرمال پایه را بسازیم.

* اگر در فضای R^n یک مجموعه $U=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ پیدا کردیم که بردار پایه قسمتی از آن بود، این مجموعه هرگز منحصر به فرد نیست

1) $e_1 = \dfrac{u_1}{l(u_1)}$

e_1 هیچگاه نمی تواند صفر باشد. اگر صفر باشد یعنی u_1 باید صفر باشد که این خلاف استقلال خطی U است.



2) $V_2 = u_2 - c_1 e_1 \quad (1)$

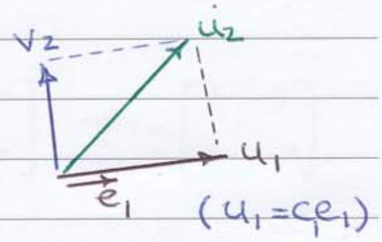
V_2 عمود بر e_1 است.

$(e_1, V_2) = (e_1, u_2) - c_1 (e_1, e_1)$

$0 = (e_1, u_2) - c_1 * 1$

$\rightarrow c_1 = (e_1, u_2) \quad (2)$

$\xrightarrow{(2),(1)} V_2 = u_2 - (e_1, u_2) e_1 \qquad e_2 = \dfrac{u_2}{l(u_2)}$



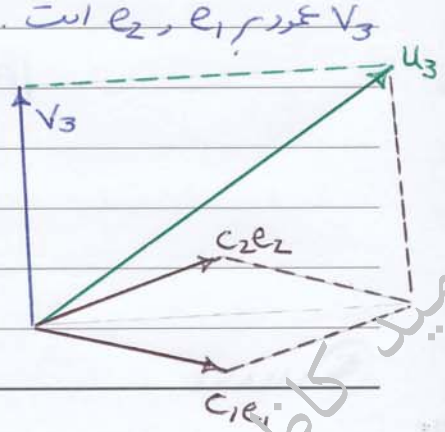
$(u_1 = c e_1)$

3) $V_3 = u_3 - c_1 e_1 - c_2 e_2 \quad (3)$

V_3 عمود بر e_1 و e_2 است.

$$\begin{cases} (e_1, V_3) = (e_1, u_3) - c_1 (e_1, e_1) - c_2 (e_1, e_2) \\ (e_2, V_3) = (e_2, u_3) - c_1 (e_2, e_1) - c_2 (e_2, e_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = (e_1, 3) \\ c_2 = (e_2, u_3) \end{cases} \quad (4)$$



$\xrightarrow{(3),(4)}$ $V_3 = u_3 - (e_1, u_3)e_1 - (e_2, u_3)e_2 \qquad e_3 = \dfrac{u_3}{l(u_3)}$

در حالت کلی :

$$V_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} (e_k , u_j) e_k \qquad e_j = \frac{u_j}{l(u_j)}$$

* این رابطه تنها زمانی به مشکل می‌خورد که مجموعه مستقل خطی نباشد.
* اگر هرمیتی داشتیم تعاریف همین است و تنها قوانین هرمیتی وارد عمل می‌گردد.

تمرین ۶: اگر $u_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $u_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ باشند آنگاه مجموعه بردارهای نرمال متعامد e_1 , e_2 , e_3 را بدست آورید.
(راهنمایی: ابتدا شرایط استقلال خطی کنترل شود)

در این صورت بردارهای $e_1 , e_2 , e_3 , \ldots , e_m$ مجموعه متعامد نرمال پایه می‌باشند.

حمید کاظم

حمید کاظم

فصل دوم

«ماتریس‌ها»

قوانین حاکم :

۱) مزدوج یک ماتریس بصورت زیر تعریف می‌گردد.

ماتریس مزدوج (Conjugate Matrix) of $\underset{\sim}{A} \longrightarrow \overline{A}$

If : $\underset{\sim}{A} = [a_{ij} + i b_{ij}] \Longrightarrow \overline{A} = [a_{ij} - i b_{ij}]$

If : $\underset{\sim}{A}$ = حقیقی باشد = $\underset{\sim}{A}$ $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ = حقیقی است

۲) در حالت کلی $\underset{\sim}{AB} \neq \underset{\sim}{BA}$ و اگر $\underset{\sim}{A} \neq 0$ داریم :

$$\underset{\sim}{AB} = \underset{\sim}{AC} \xrightarrow{A \text{ دلخواه}} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}$$

۳) اگر $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0}$ لزوماً این معنا نیست که $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{0}$ یا $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0}$ باشد.

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۴) خصوصیات دترمینان ماتریس‌ها به شرح زیر است :

$$|KA|_{n \times n} = K^n |A| \qquad |-A| = (-1)^n |A|$$

$$|AB| = |A|\,|B| \qquad |A^T| = |A|$$

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \\ d(x) & e(x) & f(x) \\ g(x) & h(x) & i(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d' & e' & f' \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g' & h' & i' \end{vmatrix}$$

دیفرانسیل روی ضرب عمل می کند.

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$
$$\det(\alpha A + \beta B) \neq \alpha . \det(A) + \beta . \det(B)$$
$$\det(AB) = \det(A) . \det(B)$$

اگر A بصورت زیر تعریف شود داریم:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A_1} & & & \\ & \underset{\sim}{A_2} & & \underset{\sim}{0} \\ & & \ddots & \\ \underset{\sim}{0} & & & \underset{\sim}{A_n} \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

۵) اگر A ماتریس تعریف شده بالا باشد:

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A_1}^{-1} & & & \\ & \underset{\sim}{A_2}^{-1} & & \underset{\sim}{0} \\ & & \ddots & \\ \underset{\sim}{0} & & & \underset{\sim}{A_n}^{-1} \end{bmatrix}$$

۶) $(\underset{\sim}{AB})^{-1} = (\underset{\sim}{B})^{-1} . (\underset{\sim}{A})^{-1}$

رتبه (rank) ماتریس: بزرگترین بعد ماتریس مربعی که دارای دترمینانی غیر صفر باشد.
هم چنین حداکثر تعداد سطرها یا ستون هایی که مستقل خطی باشد را می توان رتبه تعریف نمود.

مثال: رتبه ماتریس A را تعیین نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}_{3*4} \quad \begin{matrix} \longrightarrow e_1 \\ \longrightarrow e_2 \\ \longrightarrow e_3 \end{matrix}$$

حداکثر رنک این ماتریس 3 است.

$$G_{3\times3} = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow$$ وابسته خطی

بنابراین مرتبه ماتریس 3 نیست.

$G_{2\times2} \neq 0 \quad \longrightarrow$ پس رنک ماتریس 2 است.

مقادیر و بردارهای مشخصه:

بردارهای مشخصه بردارهایی هستند که پایه فضای برداری باشند. در این بردارها تمام خواص ماتریس در یک عدد خلاصه می شود.

$$\underset{\sim}{A}_{n\times n} \; \underset{\sim}{X}_{n\times1} = \lambda \; \underset{\sim}{X}_{n\times1}$$

$$\longrightarrow [\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}] \; \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$$

$\underset{\sim}{X}$: بردار مجهول
λ: عدد
$\underset{\sim}{A}$: ماتریس ضرایب

اگر بتوان $\underset{\sim}{X}$ هایی را پیدا کرد که غیر صفر باشند و این معادله را ارضا نمایند، $\underset{\sim}{X}_j$ ها بردار مشخصه و λ_j ها مقادیر مشخصه می باشند.

مثال: مقادیر و بردارهای مشخصه ماتریس زیر را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}]\, \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{\sim}{X} = 0$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i$$

چون ماتریس متقارن نیست پس امکان بدست آمدن مقادیر مشخصه موهومی هم می رود.

$$\text{for} \quad \lambda = +i \longrightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -i & -i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (-i)X_1 + (1)X_2 = 0$$

$$\longrightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\text{for} \quad \lambda = -i \longrightarrow \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

از گذشته می دانیم که $\varphi_1^T \cdot \varphi_2 = 0$ است که کنترل می کنیم.

$$(\varphi_1^T \cdot \varphi_2)_H = [1 \quad i] \begin{bmatrix} 1 \\ +i \end{bmatrix} = 0 \quad \text{O.K.}$$

مثال ۶: کلیه مقادیر مشخصه و بردارهای مشخصه را مشخص نمائید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

$$\longrightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 = 5: \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 1 \ , \ \lambda_3 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \varphi_{2,3} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \varphi_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* شرط تعامد برقرار نیست زیرا ماتریس A متقارن نبوده است.

مثال: آیا سه بردار مشخصه بدست آمده استقلال خطی دارند

$$G = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 16 \longrightarrow$$ مستقل خطی هستند

مثال: کلیه مقادیر مشخصه و بردار مشخصه را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F(\lambda) = (1-\lambda)^3 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 1 \longrightarrow \varphi = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

می بینیم که برای λهای تکراری φ ثابت بدست آمد. اگر ماتریس متقارن بود φهای مستقل خطی بدست می آمد.

خواص عمومی مقادیر ویژه ماتریس:

الف) نشانه Trace :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\delta_{ij}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ب) اگر ماتریس A یک ماتریس حقیقی باشد مقادیر مشخصه آن یا حقیقی یا زوج مختلط است.

$$\lambda_{1,2} = a_k \mp i b_k$$

ج) وارون ماتریس A وجود دارد اگر و فقط اگر هیچکدام از مقادیر ویژه آن صفر نباشد.
اگر سیستم به صورتی باشد که ناپایدار باشد مقدار ویژه اش صفر است که این مطلوب نمی باشد.

د) مقادیر مشخصه ماتریس وارون A که $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر مشخصه ماتریس A باشند بصورت زیر است:

$$1/\lambda_1 ,\ 1/\lambda_2 , \dots , 1/\lambda_n$$

ه) در یک ماتریس مثلثی اعداد روی قطر λ_i ها هستند.

و) اگر λ_i ها مقادیر مشخصه A باشند، مقادیر مشخصه $B=A-kI$ بصورت زیر است:

$$\lambda_1-k ,\ \lambda_2-k , \dots , \lambda_n-k$$

ز) ماتریس A را داریم. اگر $B=kA$ باشد مقادیر ویژه اش در مساوی است با:

$$k\lambda_1 ,\ k\lambda_2 , \dots , k\lambda_n$$

ح) ماتریس A را داریم. اگر $B=A^m$ باشد مقادیر ویژه B بصورت زیر است.

$$\lambda_1^m , \dots , \lambda_n^m$$

قضیه نگاشت طیفی: اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند و B ماتریس زیر باشد:

$$B = k_m A^m + k_{m-1} A^{m-1} + \dots + k_1 A + k_0 I$$

Subject:
Year: Month: Day:

آنگاه مقادیر ویژه ماتریس B بصورت زیر است

$$\lambda_j^B = k_m \lambda_{jA}^m + k_{m-1} \lambda_{jA}^{m-1} + \cdots + k_1 \lambda_{jA} + k_0$$

درمورد بردارهای ویژه ماتریس B، با بردارهای ویژه متناظر در ماتریس A برابر است.

مثال: مقادیر و بردارهای مشخصه A^2 ، A^{-1} را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -6 \rightarrow \varphi = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 24 & -14 \\ -14 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 36 \rightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -1/6 \rightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

قضیه کیلی ـ همیلتون:

اگر $F(\lambda) = 0$ شد آنگاه $F(A) = 0$ خواهد بود.

مثال: قضیه را برای ماتریس A تحقیق کنید.

SAMAND

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow F(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\longrightarrow F(A) = A^2 - 4A + 3I = 0 \longrightarrow A^2 = 4A - 3I$$

دو طرف تساوی را در A^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$A = 4I - 3A^{-1} \longrightarrow A^{-1} = -\tfrac{1}{3}A + \tfrac{4}{3}I$$

(این روش برای کاهش محاسبات است)

فرمول سیلوستر:

اگر بخواهیم رابطه‌ای برای ماتریس A بنویسیم بهتر است بصورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P(\underset{\sim}{A}) = \sum_{J=1}^{n} P(\lambda_J) \cdot Z_J$$

A: ماتریس متقارن است.

Π: علامت ضرب است.

$$Z_j = \frac{\prod_{r \neq j} (A - \lambda_r I)}{\prod_{r \neq j} (\lambda_j - \lambda_r)}$$

مثال: $Cn(\underset{\sim}{A})$ را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$$

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ \\ Z_2 = \dfrac{(A - \lambda_1 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{cases}$$

$$Cn\,\underset{\sim}{A} = Cn(1)\, Z_1 + Cn(3)\, Z_2$$

اگر سازه در پلان در دو جهت یکسان باشد یعنی در دو سختی یکسان داشته باشد Mode shape های تکراری داریم.

مثال: e^A را محاسبه نمایید.

$$e^A = (e^1) Z_1 + (e^3) Z_2$$

مثال: ماتریس A^{50} را محاسبه نمائید.

هم از قضیه همیلتون و هم از سیلوستر می توان استفاده نمود.

$$A^{50} = (1)^{50} Z_1 + (3)^{50} Z_2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}] = [a_{ij}]^T$$

ماتریس متقارن (Sym.): در این ماتریس داریم:

* λ این ماتریس حقیقی است.
* در اینجا منظور ماتریس حقیقی متقارن است.
* بردارهای مشخصه متعامدند حتی اگر ریشه ها تکرار شوند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}] = -[a_{ij}]^T$$

ماتریس متقارن اریب (Skew Sym.):

* λ حقیقی یا زوج مختلط نداریم
* λ صفر یا کاملاً مجازی داریم. $(\lambda = 0 \ , \ \lambda = \pm 25i)$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}]^{-1} = [a_{ij}]^T$$

ماتریس متعامد نرمال (Orthonormal):

در این ماتریس ستون ها بر هم عمودند، سطرها بر هم عمودند. نرم ستون ها و سطرها برابرند.

* λ حقیقی یا زوج مختلط
* نرم واحد $\sqrt{a^2+b^2} = 1$
* دترمینان ± 1 است.

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

بردارهای پایه در فضای ماتریسی:

بردارهای مشخصه ماتریس های حقیقی متقارن می توانند بردارهای پایه در فضای مورد نظر باشند.

$$V = \sum_{J=1}^{n} \varphi_J \, q_J(t) \longrightarrow$$ اساس تحلیل طیفی

$$u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$$

مکان ــــ زمان

ماتریس هرمیتی (Hermitian):

$$\bar{A}^T = A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 9 \longrightarrow$$ λ حقیقی

ماتریس هرمیتی اریب: (skew Hermitian):

$$\bar{A}^T = -A$$

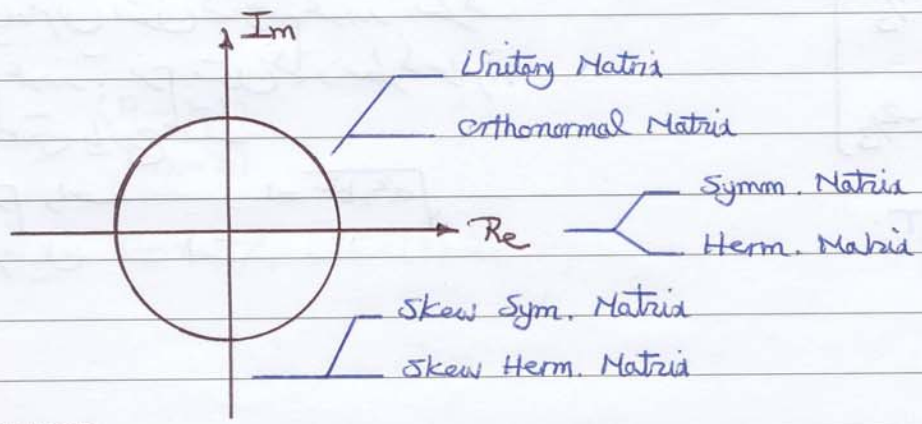
$$\begin{bmatrix} -3i & +2+i \\ -2+i & i \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -2i \quad \lambda_2 = 4i \longrightarrow$$ λ عدد مختلط

ماتریس یکانی (Unitary):

$$\bar{A}^T = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \longrightarrow$$ نرم λ ها واحد است

جمع آوری نتایج:



SAMAND

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

عوامل تغییر ناپذیر یک ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n-\lambda \end{bmatrix}$$

$$F(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \beta_1 \lambda^{n-1} + \beta_2 \lambda^{n-2} + \beta_3 \lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \beta_n \right] = 0$$
$$= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = Trace(A) \\ \beta_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\cdot\lambda_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots \\ \beta_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \beta_n = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n = |A| \end{cases}$$

بردارهای پایه در فضای ماتریسی :

بردارهای مشخصه ماتریس های حقیقی متقارن می توانند بردارهای پایه در فضای مورد نظر باشند.

$$V = \sum_{J=1}^{n} \varphi_J \, q_J(t) \longrightarrow$$ اساس تحلیل طیفی

$$u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$$

زمان ها مکان

ماتریس هرمیتی (Hermitian) :

$$\bar{A}^T = A$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 9 \longrightarrow$$ λ حقیقی

ماتریس هرمیتی اریب : (skew Hermitian) :

$$\bar{A}^T = -A$$

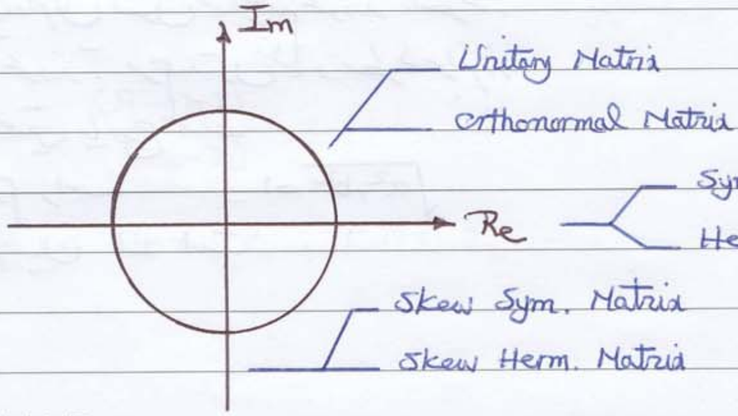
$$\begin{bmatrix} -3i & +2+i \\ -2+i & i \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -2i, \quad \lambda_2 = 4i \longrightarrow$$ λ عدد مختلط

ماتریس یکانی (Unitary) :

$$\bar{A}^T = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \longrightarrow$$ نرم λ ها واحد است

جمع آوری نتایج :



Subject:
Year: Month: Day:

عوامل تغییر ناپذیر یک ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n-\lambda \end{bmatrix}$$

$$F(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \beta_1 \lambda^{n-1} + \beta_2 \lambda^{n-2} + \beta_3 \lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \beta_n\right] = 0$$
$$= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = Trace(A) \\ \beta_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\cdot\lambda_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots \\ \beta_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \quad \vdots \\ \beta_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = |A| \end{cases}$$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

* در کتب‌های ریاضیکی هیچگاه به λهای منفی نباید برخورد کنیم.

فرم‌های قطعاً مثبت:

اگر ماتریس حقیقی متقارن A داشته باشیم، ماتریس A را قطعاً مثبت می‌نامیم به ازای تمامی xهای غیر صفر اگر:

$$x^T . A . x > 0 \longrightarrow \text{Positive Definite}$$

برای ارزیابی P.D. بودن یک ماتریس:

الف) کلیه مقادیر مشخصه ماتریس A مثبت و غیر صفر باشند.

ب) قانون علامت دکارت اگر کلیه β_jها مثبت باشند ← λها مثبت و غیر صفرند.

اگر کلیه βها مثبت باشد در $F(\lambda)$ طبق قانون دکارت تمامی ریشه‌ها مثبت هستند.

ج) m امین تابع تعیین (mth Discriminant) ماتریس A، Δ_m:

در تابع تعیین m، m سطر و m ستون را جدا کرده و دترمینان می‌گیریم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = |A|$$

در صورتیکه Δ_m مثبت باشد.

برای ارزیابی حالت "ج" راحت‌تر از حالت "ب" است.

اگر ماتریس P.D. باشد:

۱) λهای غیر صفر دارد.

۲) وارون دارد.

۳) متقارن دارد.

Subject:
Year: Month: Day:

مسائل عمومی مقادیر مشخص :

اگر رابطه زیر برقرار باشد :

$$Ax = \lambda B x \quad (1)$$

در این حالت یک مسئله عمومی مقادیر مشخصه داریم.

B , A : ماتریس حقیقی متقارن

$$\to [A - \lambda B]\, x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 & \text{بدیهی} \\ x \text{ غیر صفر} & \to |A - \lambda B| = 0 \to \begin{cases} \lambda_i , u_i \\ \lambda_j , u_j \end{cases} \end{cases}$$ (مربوط به رابطه (1))

$$\begin{cases} A u_i = \lambda_i B u_i & (2) \\ A u_j = \lambda_j B u_j & (3) \end{cases}$$

$$(2) \to u_i^T . A = \lambda_i u_i^T B \xrightarrow{\text{دو طرف ضرب در } u_j} u_i^T . A . u_j = \lambda_i u_i^T B u_j \quad (4)$$

$$(3) \to u_i^T [A u_j = \lambda_j B u_j] \to u_i^T . A . u_j = \lambda_j u_i^T B u_j \quad (5)$$

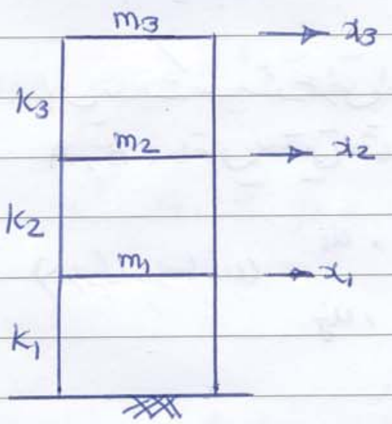
$$(4),(5) \to (\lambda_i - \lambda_j)\, u_i^T B u_j = 0 \to u_i^T . A . u_j = 0$$

$$\Longrightarrow \langle u_i , u_j \rangle_B = 0$$

از رابطه (1) داریم :

$$B^{-1} A x = \lambda x$$

مثال: سازه برشی زیر را در نظر بگیرید (سازه برشی سازه‌ای است که جابجایی نسبی افقی دارد و دوران ستون‌ها صفر است) معادله مشخصه آن را تشکیل دهید. حالت ارتعاش آزاد مد نظر است.



$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \longrightarrow x = C\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow \ddot{x} = -\omega^2 C \sin(\omega t+\phi)$$

$$\left[-\omega^2 \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{K}\right]\underset{\sim}{C} = 0 \longrightarrow \left|K - M\omega^2\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_1+k_2-\lambda m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3-\lambda m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3-\lambda m_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال: بررسی نمایید ماتریس‌های جرم و سختی P.D. هستند یا خیر.

$$\begin{cases} \Delta m_1 = m_1 > 0 \\ \Delta m_2 = m_1 m_2 > 0 \\ \Delta m_3 = m_1 m_2 m_3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta k_1 = k_1 + k_2 > 0 \\ \Delta k_2 = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 > 0 \\ \Delta k_3 = k_1 k_2 k_3 > 0 \end{cases}$$

پس ماتریس‌های جرم و سختی P.D. هستند.

$$m_1 = m_2 = m_3 = m \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$\omega_1 = 0.445\sqrt{k/m} \qquad \omega_2 = 1.247\sqrt{k/m} \qquad \omega_3 = 1.802\sqrt{k/m}$$

Subject:

Year: Month: Day:

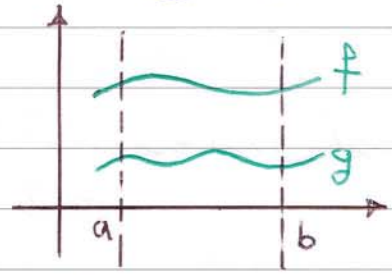
فصل سوم

«فضای توابع»

تعاریف:

۱) اگر دو تابع $f(x)$, $g(x)$ را داشته باشیم که هیچکدام مضرب دیگری نباشد می‌توان تمام ترکیب‌های خطی از این دو تابع را $h(x)$ نامید.

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$



۲) ضرب داخلی دو تابع $f(x)$, $g(x)$ بصورت زیر تعریف می‌گردد (در بازه (a,b))

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

۳) نرم تابع $f(x)$ بصورت زیر قابل تعریف است:

$$\text{Norm } f(x) = \| f(x) \| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}$$

نرمال‌سازی $h(x) = \dfrac{f(x)}{\| f(x) \|}$

۴) می‌توان توابعی مانند $f_1(x)$ الی $f_n(x)$ یافت که توابع پایه در فاصله (a,b) باشند.

۵) به مجموعه‌ای از توابع مانند $f_1(x)$ ، $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$ در فاصله (a,b) که بصورت زیر تعریف شوند:

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) = 0$$

اگر در این تعریف $a_j = 0$ شوند این توابع مستقل خطی هستند.

Subject:
Year: Month: Day:

با استفاده از انتگرال گرام هم می‌توان وابسته خطی بودن را بررسی نمود.

$$G = \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & \cdots & (f_1, f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_n, f_1) & \cdots & (f_n, f_n) \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow$$ مجموعه مستقل خطی است.

اگر مجموعه $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ در فاصله (a,b) یک مجموعه مستقل خطی باشد می‌تواند توابع پایه در فاصله (a,b) محسوب گردد.

۶) اگر مجموعه پایه یا مستقل خطی $\{f_1, \ldots, f_n\}$ داشته باشیم، همواره از روش گرام - اشمیت می‌توان از آن به توابع متعامد نرمال $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ رسید.

۷) اگر تابعی مانند $f(x)$ در فاصله (a,b) تعریف شده باشد، مجموعه متعامد نرمال پایه $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ نیز موجود باشد

$$C_j = (f(x), \varphi_j(x)) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_j(x)\, dx \longrightarrow$$ ثابت فوریه

هدف یافتن بهترین تقریب از تابع $f(x)$ بر اساس مجموعه پایه $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ در فاصله (a,b) است. فرض کنیم تقریب مناسب $f(x)$ بصورت زیر باشد

$$f(x) \simeq \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x)$$

از دیدگاه حداقل کردن خطا اگر مربع نگاه کنیم مقدار خطا بصورت زیر است:

$$\Delta_n = \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum a_j \varphi_j \right]^2 dx \qquad (1)$$

می‌خواهیم ضرایب a_j برای سری فوریه را بدست آوریم.

$$\Delta_n = \int_a^b \left[f^2(x) + \left(\sum a_j \varphi_j\right)^2 - 2 f(x) \sum a_j \varphi_j \right] dx \qquad (2)$$

$$= \int_a^b f^2(x)\, dx + \int_a^b \left(\sum a_j \varphi_j\right)^2 dx - 2 \int_a^b f(x) \left(\sum a_j \varphi_j\right) dx \qquad (3)$$

در اینجا می‌خواهیم اختلاف دو تابع $f(x)$ و Σ را حداقل کنیم یعنی Δ را Min کنیم.

$$\int_a^b \left(\sum a_j \varphi_j\right)^2 dx = \int_a^b \left(a_1^2\varphi_1^2 + 2a_1a_2\varphi_1\varphi_2 + a_2^2\varphi_2^2 + \dots\right) dx \qquad (4)$$

چون $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ یک مجموعه متعامد نرمال است پس:

$$\begin{cases} \int_a^b \varphi_1^2 \, dx = 1 \\ \int_a^b \varphi_1 \varphi_2 \, dx = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

$$(4),(5) \longrightarrow \int_a^b \left(\sum a_j \varphi_j\right)^2 dx = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \qquad (6)$$

$$\int_a^b f(x)\left(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots\right) dx = \sum_{j=1}^{n} a_j c_j \qquad (7)$$

$$(6),(7),(2) \longrightarrow \Delta_n = \int_a^b f(x)^2 dx + \sum_1^n a_j^2 - 2\sum_1^n a_j c_j$$

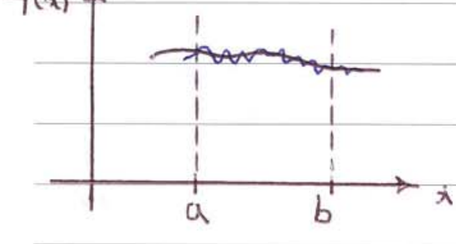
$$= \int_a^b f(x)^2 dx - \sum_1^n c_j^2 + \sum_1^n (a_j - c_j)^2 \qquad (8)$$

برای حداقل کردن Δ_n باید جمله آخر معادله (8) را حداقل کنیم. بهترین تقریب تابع $f(x)$ برحسب توابع $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ در فاصله (a,b) بصورت زیر است:

$$a_j = c_j \qquad (9)$$

مقدار خطا $\quad \Delta_{Min} = \int_a^b f(x)^2 dx - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \geqslant 0$

این خطا نشان می‌دهد که اگر در فاصله (a,b) تابع شکل بهترین تابع نیز باشد هیچوقت خطا صفر نیست. هم‌چنین چون خطا در کل بازه کم شده (نه در نقطه) پس یعنی در بعضی موارد ممکن است خطا زیاد باشد.



$$\|f(x)\|^2 \geqslant \sum_1^n c_j^2 \qquad \text{(نامساوی بسل)}$$

نامساوی بسل می‌گوید که اگر تعداد جملات زیاد شد دچار ناپایداری در تعریف نخواهیم شد و سیستم واگرا نخواهد شد (خطا زیادتر از سقف نمی‌شود)

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

ضرب عددی وزندار یا عوضی:

ضرب عددی وزن دار را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f(x), g(x))_{r(x)} = \int_a^b r(x) \cdot f(x) \cdot g(x)\, dx$$

وزندار کردن به این معناست که در فاصله‌ای مقدار تابع را عوض می‌کنیم که این با وزن دادن امکان پذیر است. در اینجا سمت چپی از تابع کوچکتر و سمت راستی بزرگتر می‌شود

نرم وزندار:

این نرم بصورت زیر قابل تعریف است:

$$\|f(x)\|_{r(x)} = \left[\int_a^b r f^2\, dx\right]^{1/2}$$

مسائل اشتورم - لیوویل:

این معادلات، مقادیر مشخصه در فضای توابع را می‌دهد.

$$[r(x) \cdot y']' + [q(x) + \lambda p(x)]\, y = 0 \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

این در نشان دادند که بسیاری از توابع به اینصورت قابل بررسی هستند

$y(x)$: تابع مجهول

$p(x), q(x), r(x)$: توابعی معلوم از متغیر مستقل x است.

λ: مقدار مشخصه

معادله بسل: $z^2 y'' + z y' + (z^2 - n^2) y = 0$

$$y' = dy/dz \qquad y'' = d^2y/dz^2$$

$$z = kx \longrightarrow [x y']' + \left(\frac{-n^2}{x} + \lambda x\right) y = 0$$

در مسائل اشتورم - لیوویل λ اهمیتی ندارد. توابع اصلی‌شان مشترک است

Subject:
Year: Month: Day:

معادله لژاندر : $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \qquad \lambda = n(n+1)$$

مثال : توابع مربوط به اشتورم - لیوویل برای تابع زیر را بدست آورید.

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad r(x) = 1 \;,\; q(x) = 0 \;,\; p(x) = 1$$

شرایط معادله اشتورم - لیوویل :

یکی کم از دو معادلات می‌تواند به عنوان شرط مرزی بیان شود.

شرایط مرزی
$$\begin{cases} k_1 y_1(a) + k_2 y'(a) = 0 \\ (a \leq x \leq b) \\ l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

قضیه حقیقی بودن پاسخ‌ها : اگر توابع p ، q ، r ، r' در فاصله $[a,b]$ پیوسته و حقیقی و p همواره مثبت و یا همواره منفی باشد ، همه مقادیر مشخصه مسئله اشتورم - لیوویل حقیقی هستند.

در حالت کلی معادله و شرایط مرزی تعریف شده باشد مسئله اشتورم - لیوویل بی‌نهایت جواب دارد.

مثال : تابع مشخصه معادله زیر را بدست آورید.

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \;,\; y(\pi) = 0 \qquad [0,\pi]$$

λ می‌تواند به ۳ صورت زیر باشد :

$$\lambda = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 0 \rightarrow y = ax + b \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} y = 0$$

$\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -{}^{2} \rightarrow y'' - \nu^2 y = 0 \rightarrow y = Ae^{\nu x} + Be^{-\nu x}$

شرط مرزی $\longrightarrow A = B = 0 \rightarrow y = 0$

$\lambda > 0 \rightarrow \lambda = \nu^2 \rightarrow y'' + \nu^2 y = 0 \rightarrow y(x) = \alpha e^{rx}$

$\rightarrow y' = \alpha r e^{rx} \rightarrow y'' = \alpha r^2 e^{rx}$

$\rightarrow (r^2 + \nu^2)\alpha e^{rx} = 0 \rightarrow (r^2 + \nu^2) = 0 \rightarrow r = \pm i\nu$

$y(x) = \alpha_1 e^{+i\nu x} + \alpha_2 e^{-i\nu x} \quad (1)$

داریم که :

$e^{\pm i\nu x} = \cos\nu x \pm i \sin\nu x \quad (2)$

$(1),(2) \rightarrow y(x) = A\cos\nu x + B\sin\nu x$

$A = \alpha_1 + \alpha_2 \quad , \quad B = \alpha_1 i - \alpha_2 i$

هم ۳ مجهول و دو شرط مرزی داریم (ν, B, A)

$y(0) = 0 \;:\; A = 0 \;,\; y(x) = B\sin\nu x$

$y(\pi) = 0 \;:\; B\sin\nu\pi = 0 \rightarrow \sin\nu\pi = 0 \rightarrow \nu\pi = n\pi \rightarrow \nu = n$

$n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$\Rightarrow y(x) = B\sin nx \quad , n = 1, 2, \dots \qquad [0, \pi]$

در یک حالت از λ تعداد زیادی جواب غیر صفر در نظر گرفتیم که تابع مشخصه هستند. در اینجا هر scale از تابع مشخصه یک تابع مشخصه است و B نقش خاصی ندارد.

$n=1$  $n=2$ 

$n=3$ 

یعنی $y = \sin nx$ توابعی مناسب برای معادله ارائه شده در بازه $[0, \pi]$ هستند.

Subject:
Year: Month: Day:

تعامد توابع اشتورم - لیوویل :

این توابع نسبت به تابع وزن $P(x)$ متعامد است.

$$\int_0^{\pi} y_i\, y_j\, dx = \int_0^{\pi} 1 * \sin ix * \sin jx\, dx = \begin{cases} 0 & i = j \\ \text{غیر صفر} & i \neq j \end{cases}$$

تمرین : ثابت کنید برای دو λ_i و λ_j متفاوت شرط تعامد برقرار است.

(راهنمایی : باید نشان داد $\int_a^b P(x)\, y_i\, y_j\, dx = 0 = (y_i, y_j)_{P(x)}$)

توابع متعامد یکه :

در اینجا هر تابع را به نرم خودش تقسیم می کنیم :

$$\varphi_j = \frac{y_j}{\|y_j\|_P}$$

در این حالت $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ توابع متعامد یکه هستند.

مثال :

$$\|y_j\| = \sqrt{\int_0^{\pi} \sin^2 jx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

$$\left\{ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\} \quad [0, \pi]$$

مثال :

$$y'' + \lambda y = 0 \quad [-\pi, \pi]$$

$$\begin{cases} y(\pi) = y(-\pi) \\ y'(\pi) = y'(-\pi) \end{cases}$$

$\lambda = 0 \longrightarrow y = 0$

$\lambda < 0 \longrightarrow y = 0$

$\lambda > 0 \longrightarrow \lambda = k^2 \longrightarrow y(x) = A \cos kx + B \sin kx$

Subject:
Year: Month: Day:

$y' = -AK\sin kx + BK\cos kx$

$\rightarrow A\cos k\pi + B\sin k\pi = A\cos k\pi - B\sin k\pi = \rightarrow 2B\sin k\pi = 0$

$\rightarrow -AK\sin k\pi + BK\cos k\pi = AK\sin k\pi + BK\cos k\pi \rightarrow 2A\sin k\pi = 0$

$\sin k\pi = 0 \rightarrow k\pi = n\pi \rightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$y = A\cos nx + B\sin nx \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

A, B محاسبه نشد. می توان یکبار A=0، یکبار B=0 گرفت (چون A, B مستقل از هم هستند)

$y = \cos nx \rightarrow 1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$

$y = \sin nx \rightarrow \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$

با سری فوریه ترکیب می کنیم.

$$f(x) = a_0 * 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad [-\pi, +\pi]$$

اهمیت ضریب، ضرایب فوریه می باشد پس.

$$a_0 = \frac{(f(x), 1)}{(1, 1)^{1/2}} \quad , \quad a_n = \frac{(f(x), \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)^{1/2}} \quad , \quad b_n = \frac{(f(x), \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)^{1/2}}$$

معادلات اشتورم - لیوویل :

فضای تابع برای دامنه پیوسته کاربرد دارد ، فضای برداری برای دامنه‌های ناپیوسته کاربرد خواهد داشت .

بسط های متعامد :

$$f(x) = \sum_{m=1}^{n} a_m y_m(x) \qquad x \in [a_1, b_1]$$

$y_m(x)$ توابع پایه : مستقل خطی ، متعامد

$$\big(f(x),\ y_j(x)\big)_{p(x)} = \Big(y_j(x),\ \sum a_m y_m(x)\Big)_{p(x)}$$

تذکر : $\left[r(x)\, y'\right]' + \left[q(x) + \lambda p(x)\right] y = 0$

$\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ توابع مشخصه بدست آمده از معادلات اشتورم لیوویل

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, y_j(x)\, p(x)\, dx = \int_a^b y_j(x)\, p(x) \Big(\sum a_m y_m(x)\Big) dx = a_j \int_{a_1}^{b_1} y_j^2\, p(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad a_j = \frac{\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, y_j(x)\, p(x)\, dx}{\int_{a_1}^{b_1} y_j^2(x)\, p(x)\, dx}$$

حال دامنه را $[-\pi, \pi]$ در نظر می‌گیریم آن گاه توابع مشخصه از معادله اشتورم - لیوویل به شرح زیر است :

$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots$

$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots$

$\rightarrow$ e.g. =5 (note)

$$y_n(x) = A\cos nx + B\sin nx \quad = A\left(\cos nx + \frac{B}{A}\sin nx\right)$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

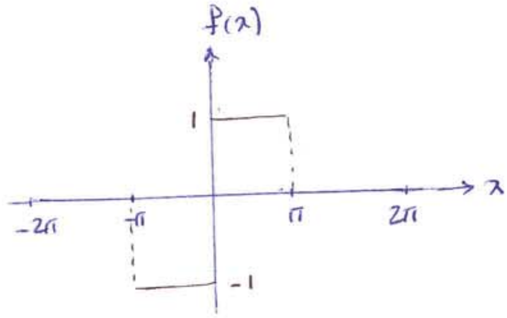
$$a_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad , \quad n=1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad , \quad n=1,2,\dots$$

مثال)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi}(1)\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(+1)\cos nx\,dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(+1)\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{n\pi}\left[1 - 2\cos n\pi + 1\right]$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{4}{n\pi} \quad \text{for } n = 1, 3, 5, \dots \qquad \text{for other values } b_n = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}\left(\frac{4}{n\pi}\right)\sin nx = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \dots\right]$$

لایب نیتز :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

قضیه : کامل بودن مجموعه توابع متعامد

$$\{1, \cos x, \dots, \sin x, \dots\}$$

[یک عضو دیگر $g(x)$]

$$\int_{-\pi}^{\pi}(1)\,g(x)\,dx = 0, \quad \dots \quad \xrightarrow[\text{ازای همه ضرایب}]{\text{با برقراری}} g(x) = 0$$

Subject:
Year: Month: Day:

لایب نیتز تعریفی ارائه کرد که جواب exact توابع با بی‌نهایت جمله را پیدا می‌کند.

قضیه کامل بودن مجموعه توابع متعامد: اگر تابع $g(x)$ در مجموعه توابع (مثل مثال قبل) وجود داشته باشد که این مجموعه شامل توابع مشخصه باشد و $g(x)$ بخواهد این مجموعه را کامل کند باید $g(x)$ بر هر عضو مجموعه متعامد باشد بنابراین:

$$g(x) = 0$$

پس کامل‌تر از مجموعه توابع متعامد وجود ندارد و نیازی نیست که دنبال ترم‌های اضافه‌تری برویم.

(کتاب kreiszig و Greenberg کتابهای ارائه شده را دارد)

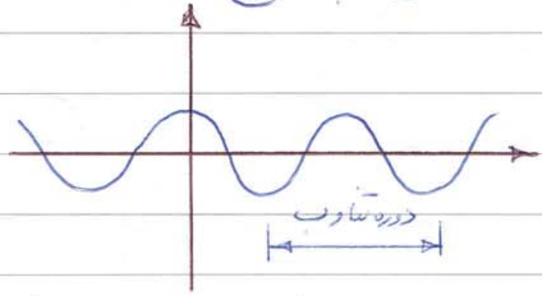
«سری فوریه»

سری فوریه را برای توابع متناوب تعریف می‌کنیم. تعریف تناوب به صورت زیر است:

$$f(x+p)=f(x)$$

p : دوره تناوب

np : مضرب دوره تناوب که صدق می‌کند.



سری فوریه را برای توابع پیچیده یا چندضابطه‌ای به کار می‌بریم.

توابعی مثل e^x ، $\ln x$ ، x^2 دوره تناوب ندارند و تناوبی نیستند.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دوره تناوب p داشته باشند دوره تناوب $h(x)=f(x)\pm g(x)$ هم p خواهد بود. اگر دوره تناوب هرکدام فرق کند، دوره تناوب $h(x)$ ک.م.م دوره تناوب دو تابع است.

دوره تناوب عدد ثابت c هر عددی می‌تواند باشد. پس دوره تناوب $l(x)=f(x)+c$ همان دوره تناوب $f(x)$ است.

همگرایی سری فوریه:

سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره اصلی 2π ، $[-\pi,\pi]$ که به صورت قطعه‌ای پیوسته باشد و در هر نقطه و در هر نقطه ناپیوستگی حد چپ و راست تابع موجود باشد همواره همگرا است.

مقدار سری در نقاط پیوستگی با مقدار تابع $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست میل می‌کند.

تمرین ۸: این توابع، توابع متناوب $[-\pi,\pi]$ می‌باشند. مقدار تابع را در نقطه $x=\pi/2$ بعد از بسط تابع بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ \pi/2 & 0<x<\pi/2 \\ 0 & \pi/2<x<\pi \end{cases}$$

Subject:

Year: Month: Day:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ -1 & 0<x<\pi/2 \\ 1 & \pi/2<x<\pi \end{cases}$$

توابع با پریود : $P=2l$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}+b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad [-l,+l]$$

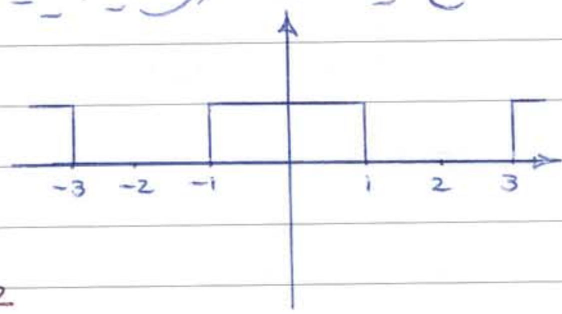
$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

مثال : تابع زیر را بصورت سری فوریه بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -2<x<-1 \\ K & -1<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(K)\,dx=\frac{K}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{+2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{K}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2K}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=0$$

می‌توانیم روی تابع $\sin\frac{n\pi}{2}$ بحث کنیم :

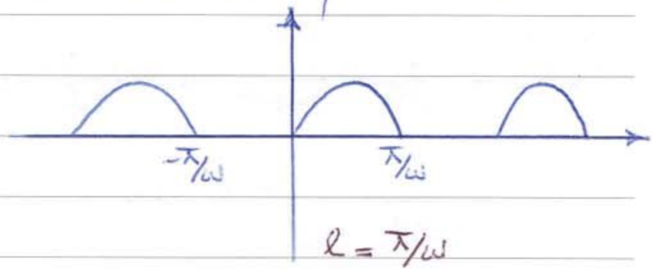
$$a_n=\begin{cases} 0 & n=2,4,6,\dots \\ 2K/n\pi & n=1,5,9,13,\dots \\ -2K/n\pi & n=3,7,11,15,\dots \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{k}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \cos\frac{n\pi x}{2} \sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\Big[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2}$$

$$+ \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{2} + \dots\Big]$$

مثال ۶. تابع زیر را در فرم یک تابع پیوسته بنویسید.

$$i(t) = \begin{cases} 0 & -l<t<0 \\ E\sin\omega t & 0<t<l \end{cases}$$



$$\frac{n\pi t}{l} = n\omega t$$

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\, dt = \frac{E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} (E\sin\omega t)\cos n\omega t\, dt = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\big[\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t\big]dt$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1-\cos[(1+n)\pi]}{1+n} + \frac{1-\cos[(1-n)\pi]}{1-n}\right] = \frac{E}{\pi}\,\frac{1+\cos n\pi}{(1-n)(1+n)}$$

If $n=1 \rightarrow$ یا سراغ فرمول اصلی بسط بریم و یا قضیه هوپیتال بزنیم

هوپیتال $\rightarrow a_1 = 0$

If $n = 3,5,7,\dots \rightarrow a_n = 0$

If $n = 2,4,6,\dots \rightarrow a_n = \dfrac{2E}{\pi(1-n^2)}$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}(E\sin\omega t)\sin n\omega t\, dt = \frac{E}{\pi}\,\frac{\sin n\pi}{(1-n)(1+n)}$$

If $n=1 \rightarrow b_1 = E/2$ (هوپیتال)

If $n\neq 1 \rightarrow b_n = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{E}{\pi} + \sum_{n=2,4,6}\left(\frac{2E}{\pi}\,\frac{1}{1-n^2}\right)\cos n\omega t + \frac{E}{2}\sin\omega t$$

$$= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t + \frac{2E}{\pi}\sum_{n=2,4,6}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{1-n^2}$$

حمید کاظم

Subject:

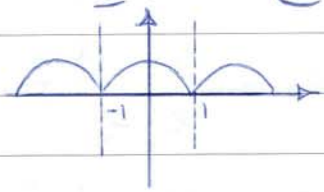
Year: Month: Day:

$$f(x)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t+\frac{2E}{\pi}\left[\frac{1}{1\times3}\cos2\omega t+\frac{-1}{3\times5}\cos4\omega t+\frac{1}{5\times7}\cos6\omega t+\cdots\right]$$

$$t=\frac{\pi}{2\omega}\rightarrow E=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}+\frac{2E}{\pi}\left[\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}-\cdots\right]$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=[\cdots]$$

تمرین : توابع متناوب زیر را بصورت سری فوریه بنویسید.



1) $f(x)=1-x^2 \qquad (-1<x<1)$

2) $f(x)=\pi x^3/2 \qquad (-1<x<1)$

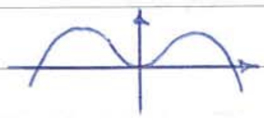
3) $f(x)=2|x| \qquad (-2<x<2)$

4) $f(x)=\pi\sin\pi x \qquad (0<x<1)$

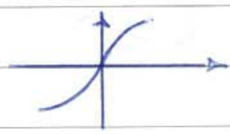
اگر دامنه‌ای به عنوان دامنه تناوب در نظر گرفت تنها زمانی می‌توان دامنه را تغییر داد که آن دامنه تناوب خود تابع باشد.

توابع زوج و فرد :

تابع زوج $\longrightarrow f(x)=f(-x)$



تابع فرد $\longrightarrow f(x)=-f(-x)$



$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-l}^{+l}f(x)\,dx=2\int_0^{l}f(x)\,dx\\ \displaystyle\int_{-l}^{+l}g(x)\,dx=0\end{cases}$$

زوج + زوج = زوج

زوج × زوج = زوج

زوج × فرد = فرد

فرد + فرد = فرد

فرد × فرد = زوج

هر تابع را می‌توان بصورت مجموع یک تابع فرد و یک تابع زوج درآورد.

$e^x =$ تابع زوج + تابع فرد

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

سری فوریه توابع زوج و فرد:

زوج $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = 0$$

فرد $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

سری فوریه مجموع توابع:

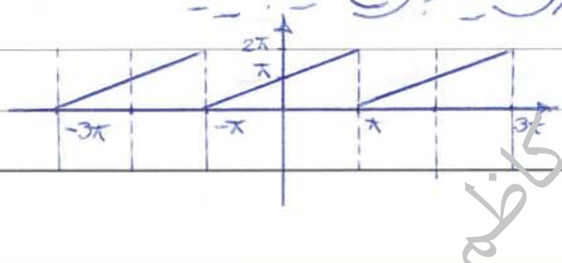
اگر تابع $g(x)$ بصورت زیر تعریف شود که:

$$g(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

سری فوریه‌اش بصورت خطی بدست خواهد آمد.

مثال: سری فوریه را برای تابع زیر بنویسید.

$$f(x) = x + \pi \qquad (-\pi < x < \pi)$$

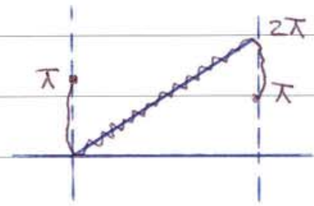


$f_1(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ $\qquad$ $f_2(x) = \pi$ $(-\pi < x < \pi)$

سری فوریه $f_1(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$

سری فوریه $f_2(x) = \pi$

$$\Longrightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$



مثال: تابع مقابل را به صورت سری فوریه بنویسید.

$f(x) = e^{-|x|}$ $\quad (-\pi < x < \pi)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-x}\,dx = \frac{1}{\pi}(1 - e^{-\pi})$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-|x|}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-x}\cos nx\,dx$$

با دو مرتبه جزء به جزء گرفتن بدست می آید:

$$I_1 = \int_0^\pi e^{-x}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\left[\left[-\frac{1}{n}e^{-x}\cos nx\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi e^{-x}\cos nx\,dx\right]$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) I_1 = \frac{1 - e^{-\pi}\cos n\pi}{n^2} \rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 - e^{-\pi}\cos \pi n}{1 + n^2}$$

$$\rightarrow f(x) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx$$

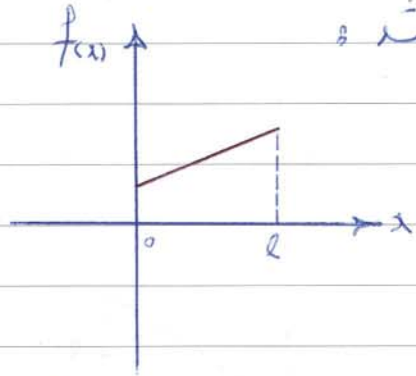
(۲۳ آبان ساعت ۱۴ میان‌ترم)

Subject:

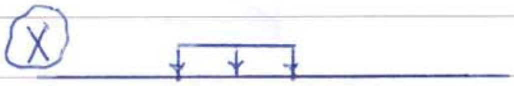
Year: Month: Day:

بسط نیم دامنه سری فوریه:

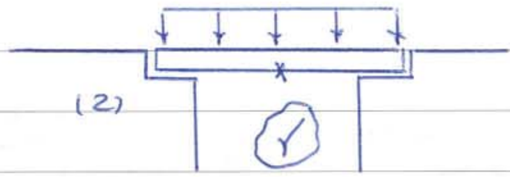
اگر تابع $f(x)$ تنها در دامنه $0 \leq x \leq l$ تعریف شده باشد:



سری فوریه قابل استفاده است اگر محدوده‌های مجاور تأثیری در پاسخ $0 \leq x \leq l$ نداشته باشند.

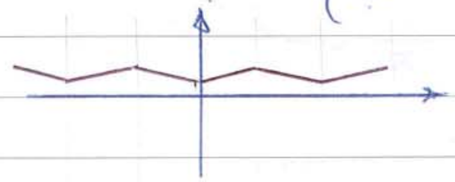


(1)

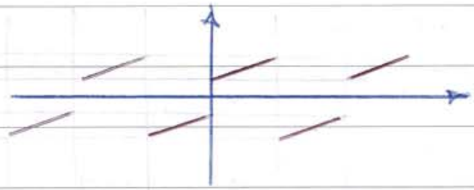


(2)

می‌توان در حالت ۲ فرض کرد تابع در محدوده‌های دیگر هم وجود دارد چون اثری بر نقطه مورد نظر ندارد



حال می‌توان فرض نمود که تابع مورد نظر در کل فرد است (سری نیم دامنه سینوسی HRS) یا در کل زوج است (سری نیم دامنه کسینوسی HRC).



۱) سری نیم دامنه کسینوسی:

$$f(x) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx$$

۲) سری نیم دامنه سینوسی:

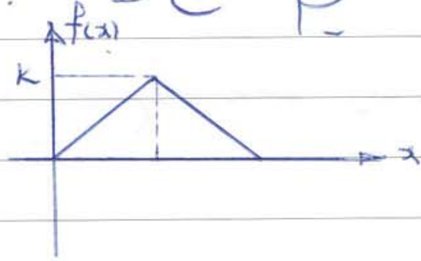
$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx$$

حمید کاظم

مثال: سری نیم دامنه تابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{l}x & 0<x<l/2\\[2mm] \dfrac{2k}{l}(l-x) & l/2<x<l\end{cases}$$



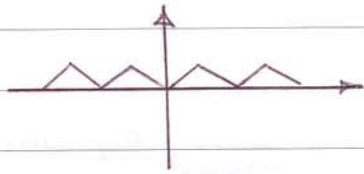
HRC :

$$a_0=k/2$$

$$a_n=\frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1\right)$$

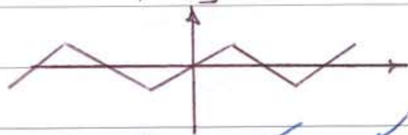
$$\longrightarrow a_n=\begin{cases}0 & \text{others}\\[2mm] \dfrac{-16k}{n^2\pi^2} & n=2,6,10,\dots\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}\sum_{n=2,6,10}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$$



HRS :

$$b_n=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\longrightarrow b_n=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \text{غیر صفر} & n \text{ فرد}\end{cases}$$



اگر گفته باشد که تابع تناوبی است با این حالت نیم دامنه باید بررسی گردد.

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

بسط یک چهارم دامنه سری فوریه:

تابع $f(x)$ را در دامنه $0<x<l$ داریم. می‌خواهیم آن را در دامنه $[-2l, 2l]$ بسط دهیم.

۱) سری یک چهارم دامنه کسینوسی: (QRC):

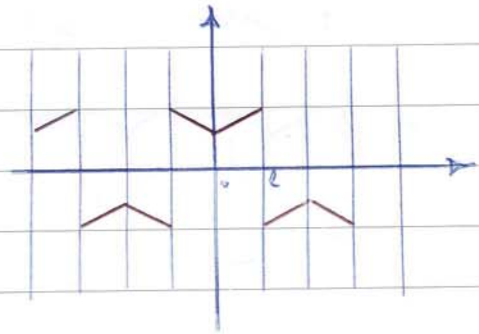
$$f(x)=\sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2l}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{2l}\,dx$$

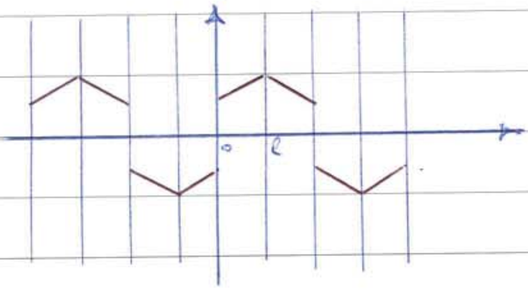
۲) سری یک چهارم دامنه سینوسی: (QRS):

$$f(x)=\sum_{n=1,3,5}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2l}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{2l}\,dx$$



در یک چهارم دامنه کسینوسی نسبت به ابتدای دامنه زوج و نسبت به انتهای دامنه فرد بدست می‌آید.



در یک چهارم دامنه سینوسی نسبت به ابتدای دامنه فرد و نسبت به انتهای دامنه زوج بدست می‌آید.

نیم دامنه را با فرض پریودیک بودن به صورت مجازی رسم می‌کنیم.

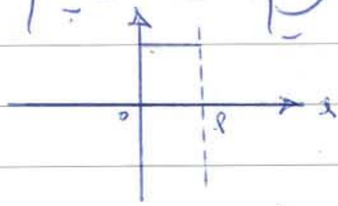
هرگاه از یک چهارم یا نیم بخواهیم استفاده کنیم در شرایط مرزی حال مشکل دارد.

Subject:

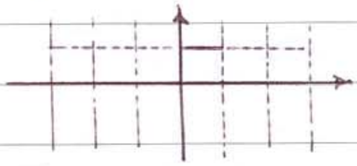
Year: Month: Day:

مثال: بسط های نیم دامنه و یک چهارم دامنه تابع زیر را محاسبه نمایید.

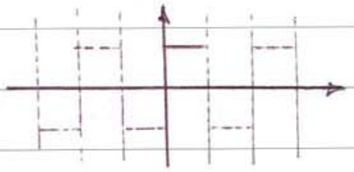
$f(x) = F \qquad [0, l]$



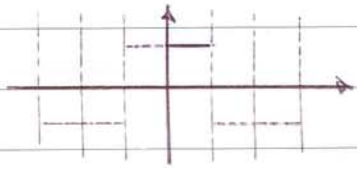
1) HRC : $\quad f(x) = F$



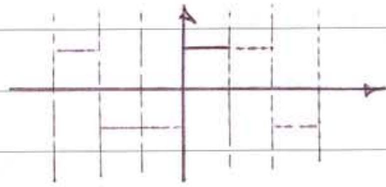
2) HRS : $\quad f(x) = \dfrac{2F}{\pi} \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1-\cos n\pi}{n} \sin \dfrac{n\pi x}{l}$



3) QRC : $\quad f(x) = \dfrac{4F}{\pi} \displaystyle\sum_{1,3,5}^{\infty} \dfrac{\sin(n\pi/2)}{n} \cos \dfrac{n\pi x}{2l}$



4) QRS : $\quad f(x) = \dfrac{4F}{\pi} \displaystyle\sum_{1,3,5}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi x}{2l}$



تمرین ۱۰: بسط های نیم دامنه و یک چهارم دامنه توابع زیر را محاسبه نمایید.

1) $f(x) = \sin x \qquad 0 < x < \pi/2$

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

3) $f(x) = 2 + x \qquad 0 < x < 3$

مثال (کاربردی): اگر تابعی مثل $r(t)$ باعث ارتعاش سیستم شود با استفاده از سری فوریه در معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم حرکت را حاصل نمایید (پاسخ ماندگار را بدست آورید)

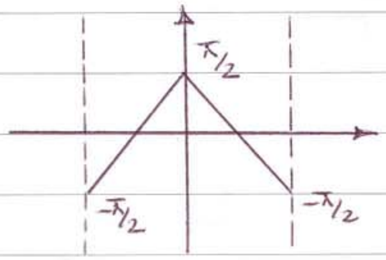
$my'' + cy' + ky = r(t)$

$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2 & -\pi < t < 0 \\ -t + \pi/2 & 0 < t < \pi \end{cases}$

$m = 1 \quad , \quad c = 0.02 \quad , \quad k = 25$

تابع بار از ده بصورت متناوب اعمال شده است.

$y =$ پاسخ گذرا + پاسخ ماندگار



از پاسخ گذرا صرف‌نظر می‌کنیم.

گام اول: بارگذاری را بصورت سری فوریه بدست می‌آوریم (r تابعی زوج است)

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nt)$$

گام دوم: تابع $y(t)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$y(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$$

$$y'(t) = \dots$$

$$y''(t) = \dots$$

برای راحت‌تر شدن Σ را برمی‌داریم.

$$\rightarrow (\quad)\cos nt + (\quad)\sin nt = \frac{4}{n\pi^2}\cos nt$$

ضرایب $\cos nt$، $\sin nt$ را برابر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{4(25-n^2)}{D} \qquad b_n = \frac{0.08}{n\pi D}$$

$$D = (25-n^2)^2 + (0.02n)^2$$

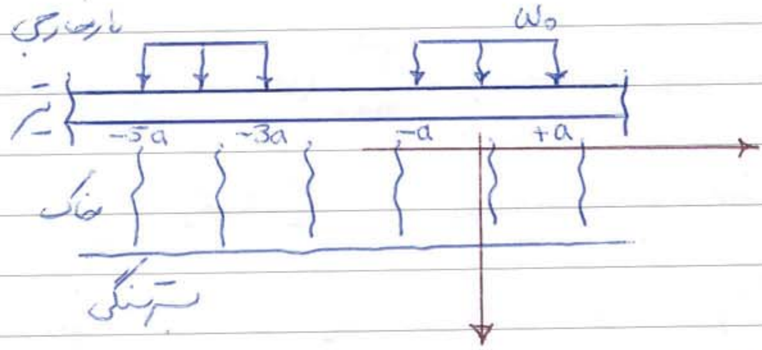
$$\rightarrow y = y_1 + y_3 + y_5 = \sum_{1,3,5} y_n$$

(سری فوریه $l_1 < x < l_2$ ← Greenberg)

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

تیر روی بستر ارتجاعی:



در اینجا فرض است که بار تناوبی می باشد

معادله تیر بر بستر ارتجاعی به شرح زیر بوده است.

$$EIu^{(4)} + ku = w(x) \qquad (1)$$

k: سختی خاک

EI: سختی خمشی تیر

$w(x)$ را بصورت سری فوریه بسط می دهیم:

$$w(x) = \frac{w_0}{2} + \frac{2w_0}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}\cos\frac{n\pi x}{2a} \qquad \text{(دامنه } [-2a,2a] \text{ است)}$$

فرض زیر را برای $u(x)$ در نظر می گیریم:

$$u(x) = u_0 + \sum_{1}^{\infty} u_n \cos\frac{n\pi x}{2a}$$

$u(x)$, $w(x)$ را در رابطه (1) قرار می دهیم. بدست می آید:

$$u_0 = \frac{w_0}{2k} \qquad u_n = \frac{(2w_0)(16a^4)\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi(EIn^4\pi^4 + 16a^4k)}$$

تمرین 11: تابع نیروی $F(t)$ تناوبی است. $m=1$, $k=10$ می باشد. معادله زیر را برای دو حالت حل کنید: $(m\ddot{x} + kx = F(t))$

$$1)\ F(t) = \begin{cases} 5\ \text{ton} & 0<t<1 \\ 10-5t\ \text{ton} & 1<t\leq 2 \end{cases}$$

$$2)\ F(t) = \begin{cases} 20 & 0<t<2 \\ 10 & 2\leq t<4 \\ 0 & 4\leq t<6 \end{cases}$$

Subject:

Year: Month: Day:

سری فوریه مختلط:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad [-\pi, \pi]$$

داریم:

$$\begin{cases} \cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \\ \sin nx = -\frac{i}{2}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) \end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x) = \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{a_n - i b_n}{2}\right) e^{inx} + \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{a_n + i b_n}{2}\right) e^{-inx} \right]$$

در علامت Σ دوم به شمارنده n نگاه می‌کنیم. n را به $(-n)$ تبدیل می‌کنیم. تغییری در پاسخ ایجاد نمی‌شود

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{a_n - i b_n}{2}\right) e^{inx} + \sum_{n=0}^{-N} \left(\frac{a_{-n} + i b_{-n}}{2}\right) e^{inx} \right]$$

تعاریف زیر را داشتیم:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(a_n + i b_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = C_n$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = C_n$$

Subject:

Year: Month: Day:

$$\to f(x)=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N} C_n e^{inx}+\sum_{n=0}^{-N} C_n e^{inx}\right]$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$n=0 \to C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=a_0$$

سری فوریه مختلط فرض تبدیل مختلط روابط برای توابع متناوب است.

مثال ؛ اگر تابع $f(x)=e^{x}$ یک تابع پریودیک در دامنه $[-\pi,\pi]$ باشد مطلوبست سری فوریه مختلط تابع

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cdot e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(\pi+in\pi)}-e^{-\pi-in\pi}\right)$$

$$e^{\pm in\pi}=\cos n\pi \pm i\sin n\pi=(-1)^n$$

$$\to C_n=\frac{(1+in)(-1)^n}{1+n^2}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\right)=\frac{(-1)^n(1+in)}{\pi(1+n^2)}\sinh\pi$$

۲ جلسه بعد

تمرین ۱۲ ؛ توابع زیر را با سری فوریه مختلط محاسبه کنید.

1) $f(x)=e^{-x}\qquad -3<x<3$

2) $f(x)=6\sin x\qquad (\text{all } x)$ (در دوره تناوب حل نمایید لطفاً)

3) $f(x)=\begin{cases}-100 & -5<x<0\\ +100 & 0<x<5\end{cases}$

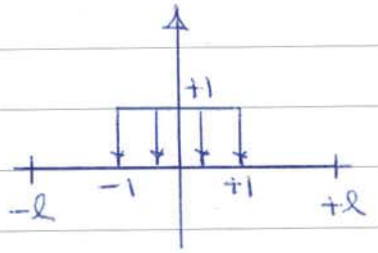
4) $f(x)=4-5\cos 2x\qquad (\text{all } x)$

SAMAND

Subject:
Year: Month: Day:

فصل پنجم:

« — »



$$a_0 = \frac{1}{l}$$

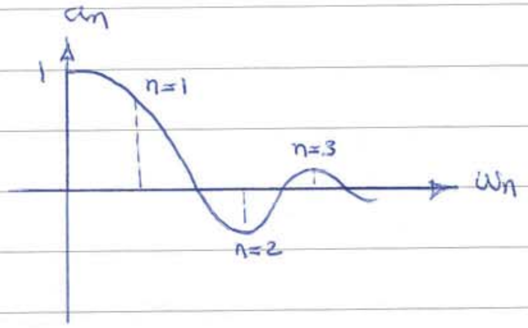
$$a_n = \frac{2\sin w_n}{l\, w_n} \qquad w_n = \frac{n\pi}{l}$$

w_n: فرکانس

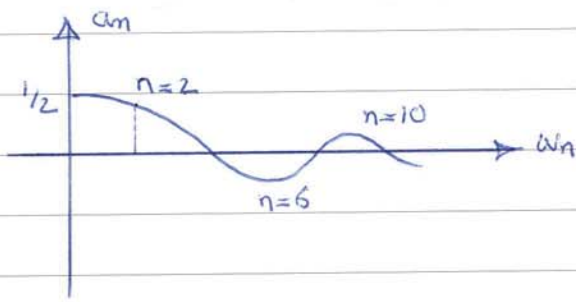
a_n: دامنه ترم های کسینوسی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos w_n x$$

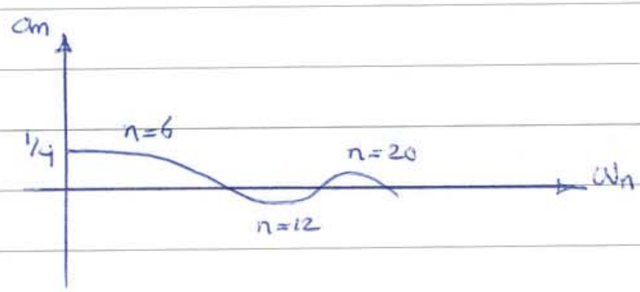
هرقدر دامنه بزرگتر شود یعنی $l = \pi$ یا 2π یا 10π شود w_n کوچکتر می گردد.



در دامنه $[-2, +2]$ نمودار $a_n - w_n$ بصورت متقارن است



در دامنه $[-4, +4]$ نمودار $a_n - w_n$ بصورت متقارن است



در دامنه $[-8, 8]$ نمودار $a_n - w_n$ بصورت متقارن است.

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\cos\omega_n x\,\underbrace{\Big(\int_{-l}^{+l}f(v)\cos\omega_n v\,dv\Big)}_{a_n}+\sin\omega_n x\,\underbrace{\Big(\int_{-l}^{l}f(v)\sin\omega_n v\,dv\Big)}_{b_n}\Big]$$

$$\times\ 1/l$$

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\ \longrightarrow\ \Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{(n+1)\pi}{l}-\frac{n\pi}{l}=\frac{\pi}{l}$$

$$\longrightarrow\ \frac{1}{l}=\frac{\Delta\omega}{\pi}$$

$$l\to\infty\ \Longrightarrow\ \Delta\omega\to d\omega\ ,\ \sum_{0}^{\infty}\to\int_{0}^{\infty}\ ,\ \omega_n\to\omega$$

$$\Longrightarrow\ \int_{-l}^{l}\to\int_{-\infty}^{\infty}$$

با اعمال تغییرات در تابع نتیجه می‌آید:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega v\,dv$$

این رابطه، رابطه انتگرال فوریه برای توابع غیرمتناوب می‌باشد.

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega v\,dv$$

قضیه: فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[-\infty,\infty]$ تعریف شده باشد به طوری که $f(x)$ در هر دامنه محدود در $[-l,+l]$ مقدار پیوسته (برای هر مقدار l مشتق) و $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد، آنگاه انتگرال فوریه تابع $f(x)$ در نقاط پیوستگی مقدار دقیق تابع و در نقاط ناپیوستگی میانگین حد چپ و راست تابع $f(x)$ را بدست می‌دهد.

مثال: انتگرال فوریه تابع زیر را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

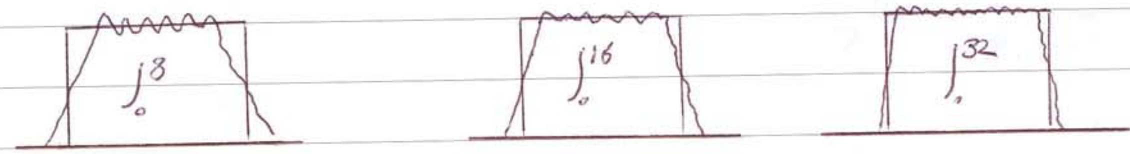
$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1)\cos\omega x\,dx=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} (1)\sin\omega x \, dx = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega \cdot \cos\omega x}{\omega} \, d\omega$$

هدف ما در این درس حل این انتگرال نیست. نیازی به حل آن نداشته باشید. شکل تابع برای محدوده‌های مختلف به شرح زیر است:



انتگرال‌های سینوسی و کسینوسی فوریه:

تابع زوج:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x \, d\omega$$

به این انتگرال، انتگرال کسینوسی فوریه گویند.

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\cos\omega v \, dv$$

تابع فرد:

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x \, d\omega$$

به این انتگرال، انتگرال سینوسی فوریه گویند.

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\cos\omega v \, dv$$

مثال: انتگرال‌های سینوسی و کسینوسی تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$f(x) = e^{-kx} \qquad x > 0 \,,\, k > 0$$

الف) انتگرال کسینوسی:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-kv}\cos\omega v \, dv$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-k\,e^{-kv}}{k^2+\omega^2}\left(-\frac{\omega}{k}\sin\omega v + \cos\omega v\right)\right]_0^{\infty}$$

باید حد زیر را محاسبه نمود:

$$\lim_{v\to\infty} |e^{-kv}|\left|\frac{-\omega}{k}\sin\omega v + \cos\omega v\right| = \lim_{v\to\infty} |e^{-ku}| \underbrace{\left|\sqrt{\left(-\frac{\omega}{k}\right)^2 + 1^2}\,\sin(\omega v \pm \varphi)\right|}_{\text{مقدار محدود}}$$

$$\rightarrow \lim_{v\to\infty} \left|e^{-kv}\right| \left|\sqrt{\left(-\frac{\omega}{k}\right)^2+1}\ \sin(\omega v \mp \varphi)\right| = 0$$

$$\rightarrow A(\omega) = \frac{2k}{\pi(k^2+\omega^2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{2k}e^{-kx} = \int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

ب) انتگرال سینوسی:

$$B(\omega) = \frac{2\pi/\omega}{k^2+\omega^2} \rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

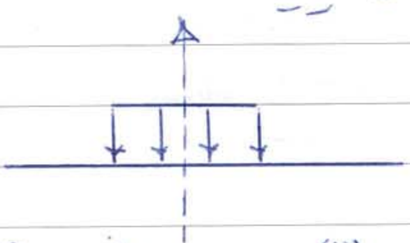
$$\rightarrow \frac{\pi}{2}e^{-kx} = \int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega$$

به انتگرال‌های زیر انتگرال لاپلاس می‌گویند.

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2k}e^{-kx} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega & (1) \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}e^{-kx} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}\,d\omega & (2) \end{cases}$$

از رابطه (1) نسبت به x مشتق بگیریم به رابطه (2) می‌رسیم.

مثال: تیر بی‌نهایت بر روی بستر ارتجاعی را به کمک انتگرال فوریه حل نمایید.



$$w(x) = \begin{cases} w_0 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$ (تابع غیر پیوسته)

مشخصه رفتار سیستم: $EIu^{(4)} + ku = w(x)$

u: میزان تغییر مکان تیر

k: سختی خاک

EI: سختی خمشی تیر بی‌نهایت

میان ترم جزوه بسته است.
یک برگه فرمول پشت و رو مشکلی ندارد

Subject:
Year: Month: Day:

$$w(x) = \frac{2w_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w}\, dw$$

در معادله اصلی معادلات از u , $u^{(4)}$ می‌باشد. پس لازم نیست $\cos wx$ همراه $\sin wx$ در فرض u استفاده شود.

$$u(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx\, dx$$

$$u^{(4)}(x) = \dots$$

از جایگذاری خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty [EIw^4 + k] A(w) \cos wx\, dw = \int_0^\infty \frac{2w_0}{\pi} \frac{\sin w}{w} \cos wx\, dw$$

$$\Rightarrow A(w) = \frac{2w_0 \sin w}{\pi w (EIw^4 + k)}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{2w_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w(EIw^4 + k)}\, dw$$

تا اینجا کافی است، نیازی به حل انتگرال نیست.

تمرین: اگر تابع $f(x)$ یک تابع زوج باشد نشان دهید برای $a>0$ داریم

1) $f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right) \cos wx\, dw$

2) $x f(x) = \int_0^\infty B^*(w) \sin wx\, dw \quad , \quad B^*(w) = \frac{-d}{dw} A(w)$

3) $x^2 f(x) = \int_0^\infty A^*(w) \cos wx\, dw \quad , \quad A^*(w) = \frac{-d^2}{dw^2} A(w)$

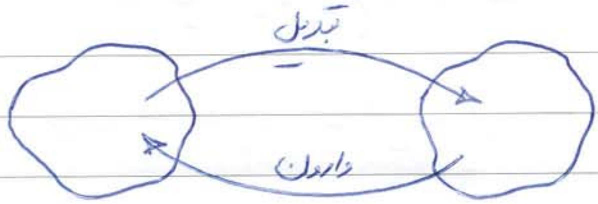
«تبدیل فوریه»

این تبدیل، تعریف دیگری از انتگرال فوریه است.

تبدیل کسینوسی:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega = F_c^{-1}\{\hat{f}_c(\omega)\} \qquad (1)$$

$$\hat{f}_c(\omega) = F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx \qquad (2)$$



$\hat{f}_c(\omega)$: تبدیل کسینوسی فوریه

$f(x)$: تبدیل وارون تبدیل کسینوسی

این روابط مربوط به کتاب کرزیگ است.

مثال: تبدیل کسینوسی فوریه $f(x) = e^{-x}$ را بدست آورید.

$$F_c\{e^{-x}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-x}}{1+\omega^2} \left(-\cos \omega x + \omega \sin \omega x\right)\Big|_0^\infty$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$$

اگر این مقدار را در رابطه دوم قرار دهیم e^{-x} را می دهد.

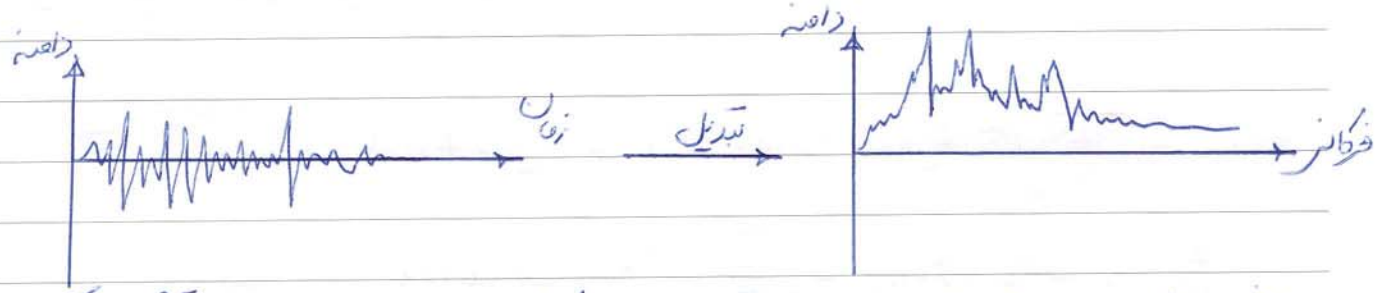
تبدیل سینوسی:

$$\hat{f}_s(\omega) = F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$$ تبدیل سینوسی فوریه

$$f(x) = F_s^{-1}\{\hat{f}_s(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$ وارون تبدیل سینوسی فوریه

مثال: تبدیل سینوسی $f(x)=e^{-x}$ را بنویسید.

$$F_s\{e^{-x}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$$



با استفاده از تبدیل فوریه می‌توان نمودار زمان - دامنه را به فرکانس - دامنه تبدیل نمود و از خصوصیاتش استفاده کرد.

ارزیابی رفتار سازه‌ای طی مراحل زیر صورت می‌پذیرد:

1) System identification
2) Module updating
3) Damage Detection
4) بهسازی
5) مقاوم‌سازی

مثال: تبدیل‌های سینوسی و کسینوسی تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$f(x)=\begin{cases} K & 0<x<a \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$F_c\{f(x)\} = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} K\cos\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,K\left(\frac{\sin a\omega}{\omega}\right)$$

$$F_s\{f(x)\} = \hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} K\sin\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,K\left(\frac{1-\cos a\omega}{\omega}\right)$$

Subject:

Year: Month: Day:

خطی بودن روابط:

اگر $c(x) = af(x) + bg(x)$ باشد، آنگاه تبدیل سینوسی و کسینوسی آن به صورت زیر است:

$$\hat{c}_c(\omega) = a\hat{f}_c(\omega) + b\hat{g}_c(\omega)$$

$$\hat{c}_s(\omega) = a\hat{f}_s(\omega) + b\hat{g}_s(\omega)$$

تبدیل مشتقات: تبدیل مشتقات را برای $f(x)$ به طوری که در x پیوسته و کاملاً مشتق پذیر است، و $f'(x)$ قطعه‌ای پیوسته و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ به صورت زیر بیان می کنند:

$$F_c\{f'(x)\} = \omega F_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0)$$

$$F_s\{f'(x)\} = -\omega F_c\{f(x)\}$$

$$F_c\{f''(x)\} = -\omega^2 F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

$$F_s\{f''(x)\} = -\omega^2 F_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega f(0)$$

مثال: با استفاده از روابط خطی بودن و تبدیل مشتقات، تبدیل کسینوسی فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = e^{-ax}$$

$$f'(x) = -ae^{-ax}$$
$$f''(x) = +a^2 e^{-ax}$$

$$\rightarrow F_c\{f'(x)\} = \omega F_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0)$$

$$\rightarrow F_c\{f''(x)\} = -\omega^2 F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

Subject:

Year: Month: Day:

$$F_c\{a^2 e^{-ax}\} = -\omega^2 F_c\{e^{-ax}\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-a e^{-ax}\right)\Big|_{x=0}$$

$$a^2 F_c\{e^{-ax}\} = -\omega^2 F_c\{e^{-ax}\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a$$

$$\Rightarrow F_c\{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

مشتق اول مشکل‌زا گردید چون تبدیل سینوسی را وارد می‌کرد.

تمرین: انتگرال بالا را هنگامی که فقط از روابط مشتق اول و مشتق دوم استفاده شود حل نمایید (تمرین تکراری نیست)

تمرین: توابع زیر را با تبدیل سینوسی حل نمایید.

1) $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < a \\ 0 & \text{نقاط دیگر} \end{cases}$

تمرین: توابع زیر را با تبدیل کسینوسی حل نمایید.

1) $f(x) = e^{-x^2/2}$

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < a \\ 0 & \text{نقاط دیگر} \end{cases}$

روابط اصلی تبدیل فوریه:

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right] d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v\, dv \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v\, dv$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\cos\omega x\cos\omega v + \sin\omega x\sin\omega v\right] dv\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega(x-v)\,dv\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left(e^{i\omega(x-v)}+e^{-i\omega(x-v)}\right)dv\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(x-v)}\,dv\,d\omega+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i\omega(x-v)}\,dv\,d\omega$$

در انتگرال با تبدیل $\omega \to -\omega$ تبدیل زیر رخ می‌دهد:

$$d\omega \to -d\omega \;,\quad \int_0^{\infty} \to \int_0^{-\infty} \to \int_{-\infty}^{0} \;,\quad e^{-i\omega(x-v)} \to e^{i\omega(x-v)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(x-v)}\,dv\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega(x-v)}\,dv\,d\omega$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال کامل فوریه}} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,e^{i\omega x}e^{-i\omega v}\,dv\,d\omega$$

حال تبدیل فوریه و وارون آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\hat{f}(\omega) = F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$f(x) = F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{+i\omega x}\,d\omega$$

مثال: تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0<x<a \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a} k e^{-i\omega x}\,dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1-e^{-ia\omega}}{i\omega}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید:

Subject:

Year: Month: Day:

$f(x) = e^{-ax^2} \quad , a > 0$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + i\omega x + (\frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2)} e^{(\frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2}$$

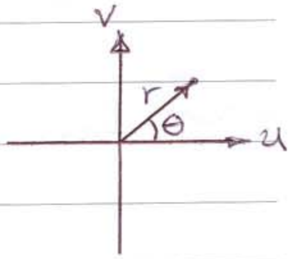
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(\sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2 + (\frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2\right] dx$$

$$= \frac{e^{-\omega^2/4a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2} dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$(z = \sqrt{a}x + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}} \rightarrow dz = \sqrt{a}\, dx$$

$$I \times I = I^2 = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv$$



$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du\, dv$$

$$\begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\longrightarrow I^2 = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr\, d\theta = \frac{\pi}{\theta} \longrightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}$$

$$\longrightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a \times 2}} e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$$

خطی بودن رابطه

$$F\{af(x) + bg(x)\} = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)$$

$$F^{-1}\{\alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)\} = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

روابط مشتق :

شرایط حالت قبل برقرار است .

$$F\{f'(x)\} = i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$F\{f''(x)\} = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$$

$$F\{f^{(n)}(x)\} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

مثال : تبدیل فوریه تابع زیر را محاسبه نمایید .

$$f(x) = xe^{-x^2} \rightarrow \hat{f}(\omega) = ?$$

داشتیم : $F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}$

$$g(x) = e^{-x^2}$$

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \rightarrow F\{g'(x)\} = -2F\{xe^{-x^2}\}$$

$$\rightarrow i\omega F\{g(x)\} = -2F\{xe^{-x^2}\}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{-i\omega}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}\right)$$

مثال : تبدیل فوریه تابع زیر را محاسبه کنید .

$$f(x) = H(x) e^{-ax} \qquad a > 0$$

$$\text{Heaviside Function}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حالت پیوسته

$$\text{Actually} \rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حمید کاظم

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-ax} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\omega} \left(e^{-(a+i\omega)} \right) \Big]_{0}^{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} |e^{-ax}| |e^{-i\omega x}| = \lim_{x \to \infty} |e^{-ax}| |\cos \omega x - i \sin \omega x|$$

$$= \lim_{x \to \infty} |e^{-ax}| \left| \sqrt{1+1} \sin(\omega x \mp \varphi) \right| = 0$$

$$\rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{a - i\omega}{\sqrt{2\pi}(a^2 + \omega^2)}$$

مثال ۰ تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = H(x+1) - H(x-1)$$

جدول ۲: تبدیل سینوسی فوریه برخی از توابع

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathcal{F}_s(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[\dfrac{1 - \cos aw}{w}\right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\Gamma(a)}{w^a}\sin\dfrac{a\pi}{2}$
5	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{w}{a^2 + w^2}\right)$
6	$\dfrac{e^{-ax}}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\arctan\dfrac{w}{a}$
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}}\,\mathrm{Im}\,(a + iw)^{n+1}$ Im = Imaginary part
8	$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
9	$xe^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\dfrac{w}{(2a)^{3/2}}\,e^{-w^2/4a}$
10	$\begin{cases} \sin x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\dfrac{\sin a(1 - w)}{1 - w} - \dfrac{\sin a(1 + w)}{1 + w}\right]$
11	$\dfrac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,u(w - a)$
12	$\arctan\dfrac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi}\,\dfrac{\sinh aw}{w}\,e^{-aw}$

حمید کاظم

جدول ۱: تبدیل کسینوسی فوریه برخی از توابع

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$	
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin aw}{w}$	
2	$x^{a-1} \qquad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{a\pi}{2}$	
3	$e^{-ax} \qquad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2}\right)$	
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$	
5	$e^{-ax^2} \qquad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\ e^{-w^2/(4a)}$	
6	$x^n e^{-ax} \qquad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}}\ \text{Re}\ (a + iw)^{n+1}$	Re = Real part
7	$\begin{cases} \cos x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1 - w)}{1 - w} + \frac{\sin a(1 + w)}{1 + w}\right]$	
8	$\cos (ax^2) \qquad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$	
9	$\sin (ax^2) \qquad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$	
10	$\frac{\sin ax}{x} \qquad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ (1 - u(w - a))$	
11	$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{2}{w^2}$	
12	$J_0(ax) \qquad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{a^2 - w^2}}\ (1 - u(w - a))$	

حمید کاظم

جدول ۳: تبدیل فوریه برخی از توابع

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathscr{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{if } 0 < x < b \\ 2x - b & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{-2ibw}}{\sqrt{2\pi}\, w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\ e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ if $\|w\| < a$; 0 if $\|w\| > a$

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{-ax}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i\omega}\left(e^{-(a+i\omega)}\right)\Big]_0^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}|e^{-ax}||e^{-i\omega x}|=\lim_{x\to\infty}|e^{-ax}||\cos\omega x-i\sin\omega x|$$

$$=\lim_{x\to\infty}|e^{-ax}||\sqrt{1+1}\sin(\omega x\mp\varphi)|=0$$

$$\rightarrow \hat{f}(\omega)=\frac{a-i\omega}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=H(x+1)-H(x-1)$$

$$H(x-1)=\begin{cases}1 & x>1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}\qquad H(x+1)=\begin{cases}1 & x>-1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & -1<x<1\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1)e^{-i\omega x}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

هم‌پیچشی (Convolution):

تعریف هم‌پیچشی بصورت زیر است. دو تابع $f(x)$, $g(x)$ داریم

$$h(x)=f(x)*g(x)=(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

تمرین: ثابت کنید دو انتگرال برابرند (تحویل بدهید)

Subject:

Year: Month: Day:

از این تعریف در مسائل random process استفاده می شود.

تبدیل فوریه این تعریف به صورت زیر می باشد.

$$F\{f(x)*g(x)\} = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$$

$$\xrightarrow[\text{تحریک}]{\text{ورودی}} \text{Sys.} \xrightarrow[\text{پاسخ}]{\text{خروجی}}$$

$X(\omega)$ $\quad H(\omega)$ $\quad Y(\omega)$

$$Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega)$$

روابط انتقال روی محورهای x ، ω.

تبدیل فوریه تابع $f(ax+b)$ به صورت زیر است.

$$F\{f(ax+b)\} = \frac{1}{a} e^{ib\omega/a}\,\hat{f}(\omega/a)$$

$$\to F\{f(ax+b)\} = \frac{1}{a} e^{i\frac{b\omega}{a}}\,F\{f(x)\} \qquad (a>0)$$

$$\omega \to \omega/a$$

$$F^{-1}\{\hat{f}(\alpha\omega+\beta)\} = \frac{1}{\alpha} e^{-i\beta\omega/a}\,f(x/\alpha)$$

$$\to F^{-1}\{\hat{f}(\alpha\omega+\beta)\} = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-i\beta x}{\alpha}}\,F^{-1}\{f(x)\} \qquad (\alpha>0,\ \beta=\text{real})$$

$$x \to x/\alpha$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را بیابید.

$$f(x) = 4e^{-|x|} - 5e^{-3|x+2|}$$

$$F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$g(x) = e^{-3|x+2|} \to F\{g(x)\} = \tfrac{1}{3}\, e^{+2i\omega}\, F\{e^{-|x|}\}_{\omega\to\omega/3}$$

$$\Rightarrow F\{g(x)\} = \frac{e^{2i\omega}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2}{1+(\omega/3)^2}\right)$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$= \frac{6e^{2i\omega}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{9+\omega^2}$$

$$F\{f(x)\} = 4F\{e^{-|x|}\} - 5F\{e^{-3|x+2|}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{8}{1+\omega^2} - \frac{30e^{2i\omega}}{9+\omega^2}\right]$$

سعی کنید Inverse این جواب که را محاسبه کنید تا به صورت برسید.

از جدول کتاب Kreiszig می توان استفاده نمود.

مثال : تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = xe^{-4x^2}$$

(این راه حل منحصر به فرد نیست)

$$g(x) = e^{-4x^2} \qquad \frac{d}{dx} g(x) = -8xe^{-4x^2} = g'(x)$$

$$F\{f(x)\} = F\{xe^{-4x^2}\} = F\{-\tfrac{1}{8} g'(x)\} = -\tfrac{1}{8}(i\omega)F\{g(x)\}$$

$$F\{e^{-4x^2}\} = F\{e^{-(2x)^2}\} \xrightarrow{a=2,\ b=0} = \tfrac{1}{2}F\{e^{-x^2}\}_{\omega \to \omega/2}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/16}$$

از خوبی های روش آن است که انتگرال گیری های طولانی با جداول در دسترس می باشد.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{-i\omega e^{-\omega^2/16}}{16\sqrt{2\pi}}$$

مثال : اگر تابع تبدیل فوریه ای به صورت زیر باشد، تابع اصلی را بیابید.

$$\hat{f}(\omega) = e^{-2|\omega|} \rightarrow f(x) = ?$$

$$F^{-1}\{e^{-2|\omega|}\} = \tfrac{1}{2}F^{-1}\{e^{-|\omega|}\}$$

$\alpha=2, \beta=0 \qquad x \to x/2$

SAMAND

حمید کاظم

$$F^{-1}\{e^{-|\omega|}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|}\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\omega(1+ix)}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{\omega(-1+ix)}\, d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow F^{-1}\{e^{-2|\omega|}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{4}{4+x^2}$$

مثال: تابع تبدیل فوریه بصورت زیر تعریف شده است. وارون تبدیل مورد نظر را بدست آورید.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2+4\omega+13}$$

$$\frac{1}{\omega^2+4\omega+13} = \frac{1}{(\omega+2)^2+9} = \frac{1}{9}\ \frac{1}{1+(\frac{1}{3}\omega+\frac{2}{3}\omega)^2} \qquad \alpha = \tfrac{1}{3},\ \beta = \tfrac{2}{3}$$

$$F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \tfrac{1}{9} F^{-1}\left\{\frac{1}{1+(\frac{1}{3}\omega+\frac{2}{3})^2}\right\} = \tfrac{1}{9}\times 3\, e^{-2ix}\, F^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\}_{x\to 3x}$$

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|x|}$$

$$\to F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-2ix}\, e^{-3|x|}$$

مثال: تابع $f(x)$ را بیابید در صورتیکه:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

۱) راه استفاده از جداول:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|x|}$$

۲) تبدیل به مجموع کسرهای ساده:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1/2}{1+i\omega} + \frac{1/2}{1-i\omega}$$

وقتی این کار را انجام می دهیم که تسلط بر روابط داشته باشیم.

$$F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \tfrac{1}{2} F^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\} + \tfrac{1}{2} F^{-1}\left\{\frac{1}{1-i\omega}\right\}$$

جواب $= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\Big[\underbrace{H(x)\cdot e^{-x}}_{x>0} + \underbrace{H(-x)e^{x}}_{x<0}\Big] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|x|}$

این روش تقریباً ساده‌ترین روش است.

۳) تبدیل به حاصلضرب کسرهای ساده:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} = \left(\frac{1}{1+i\omega}\right)\left(\frac{1}{1-i\omega}\right) = \hat{g}(\omega) * \hat{h}(\omega)$$

$$f(x) = F^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega} * \frac{1}{1-i\omega}\right\} \xrightarrow{\text{Convolution}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\} * F^{-1}\left\{\frac{1}{1-i\omega}\right\}$$

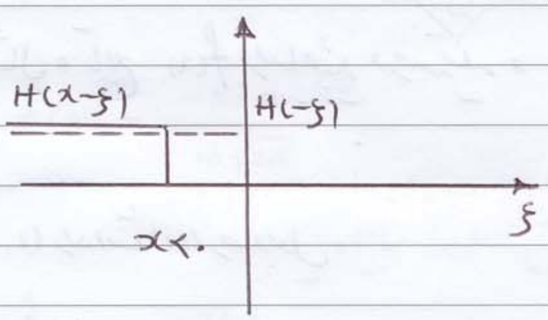
حال باید این ضرب را Convolve نمود.

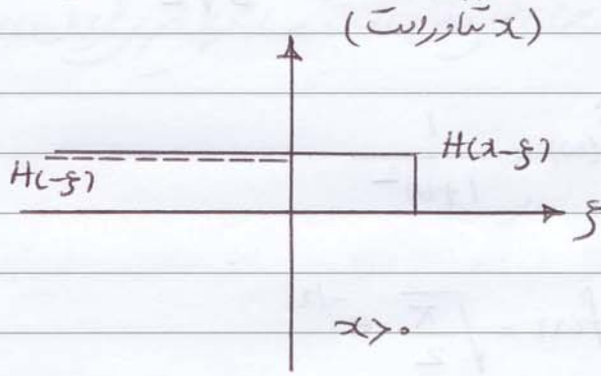
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{2\pi}\, H(x) e^{-x}\right) * \left(\sqrt{2\pi}\, H(-x) e^{x}\right)$$

$$= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(x-\xi) e^{-(x-\xi)} H(-\xi) e^{\xi}\, d\xi$$

حال باید انتگرال گرفت. دو حالت $x>0$ و $x<0$ را در نظر می‌گیریم.

$H(x-\xi)$ زمانی مقدار دارد که $\xi<x$ باشد و زمانی $H(-\xi)$ مقدار دارد که $\xi<0$ باشد.
(x ثابت است)





If $x>0$: $= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-x+2\xi}\, d\xi$ دامنه انتگرال‌گیری براساس محدوده‌ی کوچکتر است.

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\left[e^{2\xi}\right]_{-\infty}^{0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x}$$

Subject:
Year: Month: Day:

If $x<0$: $=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-x+2\xi}\,d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x}\left[e^{2\xi}\right]_{-\infty}^{x} = \sqrt{\pi/2}\, e^{x}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi/2}\, e^{x} & x<0 \\ \sqrt{\pi/2}\, e^{-x} & x>0 \end{cases} = \sqrt{\pi/2}\, e^{-|x|}$$

زمینه های کاربردی تبدیل فوریه :

تبدیل لاپلاس روی دامنه های نیمه بینهایت و تبدیل فوریه روی دامنه های تمام بی نهایت است.

$0<t<\infty \rightarrow$ laplas

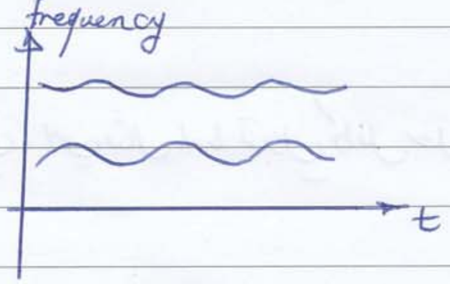
$-\infty<t<\infty \rightarrow$ fourie

در تمام تبدیل ها یک ضریب $\psi(x)$ در تابع اصلی ضرب می گردد

$$\int f(x)\cdot\psi(x)\,dx$$

این تبدیل فوریه برای توابع Continuous صادق است و برای توابع Discrete روابط اصلاح شده استفاده می گردد.

تبدیل فوریه بسیار مناسب است اما برای حالت های خاص. برای اصلاح فوریه روش هایی پیشنهاد شده است.



فرکانس های یک موج مشخص از بازه با زمان تغییر می کند. ما میانگین را بررسی می کنیم

ممکن است فوریه بعدها به عنوان روش ناکارآمد معرفی شود. در حالیکه اینگونه نیست و هنوز هم بهترین روش است.

حمید کاظم

Subject:
Year: Month: Day:

اگر تابعی با دامنه نیمه بینهایت داشته باشیم مجاز به استفاده از فوریه کامل (تبدیل فوریه کامل) نیستیم.

مثال:

$$u'' - 9u = 50e^{-2x} \qquad 0<x<\infty$$

$$u(0)=1 \ , \ u(\infty)=\text{boundry}$$

از تبدیل سینوسی و کسینوسی استفاده می‌کنیم.

$$u(0)=u_0=1$$

$$F_s\{u''\} - 9F_s\{u\} = 50F_s\{e^{-2x}\}$$

$$F_c\{u''\} - 9F_c\{u\} = 50F_c\{e^{-2x}\}$$

اگر از کسینوسی استفاده شود باید $u'(0)$ را داشته باشیم. پس فقط از سینوسی استفاده می‌کنیم.

$$-\omega^2 \hat{u}_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega u_0 - 9\hat{u}_s = \frac{50}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{\omega}{4+\omega^2}$$

$$-(\omega^2+9)\hat{u}_s = \frac{50}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{-\omega}{(4+\omega^2)(\omega^2+9)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \frac{\omega}{\omega^2+9}$$

$$u(x) = F_s^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{11\omega}{9+\omega^2} - \frac{10\omega}{4+\omega^2}\right)\right\}$$

$$\rightarrow u(x) = 11e^{-3x} - 10e^{-2x} \qquad 0<x<\infty$$

تمرین: این مثال را با تبدیل کامل حل نمایید و مقایسه کنید (کوئیز نیست)

فصل هفتم

«معادلات دیفرانسیل پاره‌ای»

در این بخش دنبال software ای هستیم که با ورودی، خروجی صحیح را به ما بدهد.

ورودی → Black Box → خروجی

ما به دنبال روابط حاکم بر مسائل هستیم. می‌توان از معادلات دیفرانسیل استفاده نمود.

وقتی معادله دیفرانسیلی چند متغیره باشد که این متغیرها مستقل از هم باشند به آن معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌گویند.

در این بخش به معادلات دیفرانسیل پرداخته می‌شود که در مهندسی اهمیت دارد.

مرتبه (order): حداکثر مشتق در رابطه

خطی بودن: در تمامی جملات فقط خود تابع یا مشتقاتش ظاهر شده باشد.

$\cancel{uu'}$

u', u'', u

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \text{خطی}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \text{غیرخطی}$$

همگن: در کلیه جملات تابع مجهول یا مشتقات آن موجود باشد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x) \rightarrow \text{غیرهمگن}$$

بُعد: تعداد متغیرهای مکانی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \rightarrow \text{دو بعدی}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt} \right)$$

معادلات کلاسیک: این معادلات مرتبه دوم و خطی هستند.

1) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ → معادله یک بعدی موج

2) $u_t = c^2 u_{xx}$ → معادله یک بعدی حرارت

3) $u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightarrow$ معادله دو بعدی لاپلاس

4) $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \rightarrow$ معادله دو بعدی پواسون

5) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \rightarrow$ معادله سه بعدی لاپلاس

حل یک معادله دیفرانسیل پاره ای :

هدف ما حل معادلات موجود در علم مهندسی می باشد .

اگر دنبال حل هستید (مثلاً معادله دو بعدی پواسون) این ۳ جواب می تواند جواب اساسی باشد

$u_1 = x^2 - y^2$ $\quad u_2 = e^{x}cy$ $\quad u_3 = \ln(x^2 + y^2)$

برای حل روش های متفاوتی است که به صورت زیر می باشد :

۱) حدس توابع تست به صورت معادله (هدف ما در این درس این حالت نیست)

۲) استفاده از روش جداسازی متغیرها به روش حل عددی (تکنیکی) به حل ترکیبی

روش جداسازی متغیرها تنها راه نیست .

تعریف : اگر فرم کلی معادله را به صورت زیر بنویسیم

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f(x,y)$$

$$\Delta = B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{بیضوی} \\ = 0 & \text{سهموی} \\ > 0 & \text{هذلولی} \end{cases}$$

براین اساس می توان روش حل را انتخاب نمود.

معادله موج را براین اساس بررسی می کنیم :

معادله ۱ $\rightarrow \Delta = 0 - (c^2)(-1) = c^2 > 0$ هذلولی

Subject:

Year: Month: Day:

معادله ۲ $\rightarrow \Delta = 0 - (c^2)(0) = 0$ سهموی

معادله ۳ $\rightarrow \Delta = 0 - (1)(1) = -1 < 0$ بیضوی

سعی شود که این سه معادله تحت تبدیل فرم شکل آن را بررسی کرد

مثال: معادله زیر در کدام حالت قرار دارد.

$$c^2 u_{xx} = u_t + V u_x + H u$$

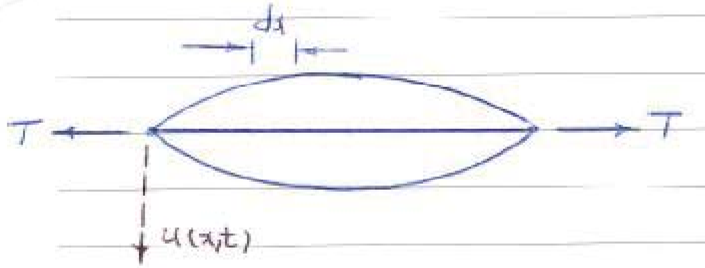
مثال: معادله Tricomi در کدام یک از ۳ حالت جای دارد.

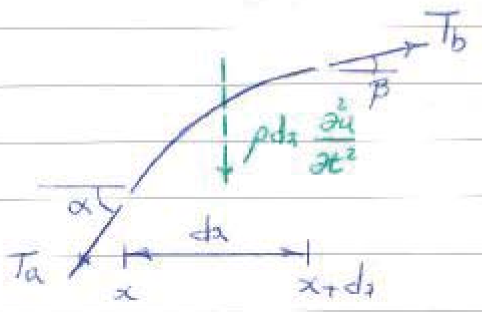
$$u_{xx} + x u_{yy} = 0$$

$$\Delta = -x \begin{cases} \text{بیضوی} & x > 0 \\ \text{هذلولی} & x < 0 \end{cases}$$

این معادله برای x های مثبت و منفی فرق می‌کند.

ارتعاش سیم (string):





$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_a \cos\alpha = T_b \cos\beta = T$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -T_a \sin\alpha + T_b \sin\beta = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \frac{-T_a \sin\alpha}{T_a \cos\alpha} + \frac{T_b \sin\beta}{T_b \cos\beta} = \frac{\rho\, dx}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow tg\beta - tg\alpha = \frac{\rho\, dx}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x \qquad tg\beta = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_x \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{\rho}{T} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$c = \frac{\rho}{T} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

این معادله همان معادله موج است.

حل معادله موج به روش جداسازی متغیرها:

گام اول:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad (1)$$

$$u(x,t) = F(x) \cdot G(t) \qquad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow G_{tt} \cdot F(x) = c^2 F_{xx} \cdot G(t)$$

طرفین را بر $c^2 F(x) G(t)$ تقسیم می‌کنیم

$$\rightarrow \frac{F_{xx}}{F} = \frac{G_{tt}}{c^2 G}$$

رابطه بالا را برابر عدد ثابت k قرار می‌دهیم، $\frac{F_{xx}}{F}$ فقط برحسب x است و رابطه $\frac{G_{tt}}{c^2 G}$ فقط برحسب t است:

$$\rightarrow \begin{cases} F_{xx} - kF = 0 \\ G_{tt} - kc^2 G = 0 \end{cases}$$

$$\text{Boundary Condition} \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Subject:
Year: Month: Day:

Initial Condition $\begin{cases} u(x,0) = f(x) & \text{تابع تغییر شکل اولیه} \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{تابع سرعت اولیه} \end{cases}$

گام دوم) حل معادله مکانی با اعمال شرایط مرزی.

$F_{xx} - FK = 0$

Boundary Conditions $\begin{cases} u(0,t) = F(0)\,G(t) = 0 \\ u(l,t) = F(l)\,G(t) = 0 \end{cases}$

$G(t)$ نمی‌تواند صفر باشد چون $u(x,t)$ برابر صفر می‌گردد.

$F(0) = 0 \;,\; F(l) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} F_{xx} - Fk = 0 \\ F(0) = 0 \;,\; F(l) = 0 \end{cases}$ حال باید سه نوع K ببریم.

شبیه همین کاری که در اشتورم لیوویل انجام می‌دادیم.

$$K = \begin{cases} \mu^2 & > 0 \\ 0 \\ -p^2 & < 0 \end{cases}$$

$K = \mu^2 \Rightarrow F(x) = 0$

$K = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

$K = -p^2 \Rightarrow F(x) = A\cos px + B\sin px$

$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$F(l) = 0 \Rightarrow B\sin pl = 0 \xrightarrow{B \neq 0} pl = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow F_n(x) = B\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

B را برابر یک در نظر می‌گیریم

$$\Rightarrow F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$$

گام سوم) حل معادله زمانی:

$$G_{tt} - c^2 k G = 0$$

از حالت قبل بدست آمده

$$k = -p^2 \quad , \quad p = \frac{n\pi}{l}$$

$$\rightarrow G_{tt} + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 G = 0 \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\rightarrow G_n(t) = B_n \cos\frac{n\pi c t}{l} + B^* \cos\frac{n\pi c t}{l}$$

گام چهارم) ترکیب بندی کلی تابع $u(x,t)$ و اعمال شرایط ابتدائی:

$$u_n(x,t) = F_n(x) \cdot G_n(t) = \left[B_n \cos\frac{cn\pi t}{l} + B_n^* \sin\frac{cn\pi t}{l}\right] \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$u(x,t) = \sum_{1}^{n} u_n(x,t)$$

اعمال شرایط ابتدائی:

$$1)\ u(x,0) = f(x) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

در اینجا به طوری رسیدیم که $f(x)$ را با بسط سینوسی فوریه نصف دامنه بسط می‌دهیم:

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx$$

$$2)\ u_t(x,0) = g(x)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{1}^{\infty}\left[-B_n\left(\frac{cn\pi}{l}\right)\sin\frac{cn\pi t}{l} + B_n^*\left(\frac{cn\pi}{l}\right)\cos\frac{cn\pi t}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\rightarrow u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\left(\frac{cn\pi}{l}\right)\sin\frac{n\pi t}{l}$$

$$B_n^* = \frac{2}{l\left(\frac{cn\pi}{l}\right)}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx$$

Subject:

Year: Month: Day:

$$u(x,t)=\sum_{1}^{\infty} B_n \cos\frac{cn\pi t}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell} \qquad (\text{if } g(x)=0)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(x-ct)+f(x+ct)\right)$$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{\ell}x & 0<x<\ell/2\\[2ex] \dfrac{2k}{\ell}(\ell-x) & \ell/2<x<\ell\end{cases}$$

$$B_n=\frac{}{\ell}\int_0^{\ell/2}\left(\frac{2k}{\ell}x\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx+\frac{2}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}\left(\frac{2k}{\ell}(\ell-x)\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$B_n^*=0$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos\frac{c\pi t}{\ell}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{\ell}\cos\frac{3\pi tc}{\ell}+\cdots\right.$$

$$B_n=\frac{8k\sin\frac{n\pi}{2}}{(\pi n)^2} \qquad n=1,3,5,\dots$$

تمرین: تغییر مکان ارتعاش تار نازکی با شرایط زیر را محاسبه نمایید.

$L=\pi \qquad c^2=1$

$f(x)=0.1\sin x$

$g(x)=0.2\sin x$

Subject:
Year: Month: Day:

حل معادله موج به روش دالامبر

$v = x + ct$

$z = x - ct$

$u(x,t) = u(v,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}^{1} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}^{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}^{1} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}^{1}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{c} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cancel{\frac{\partial z}{\partial t}}^{-c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)c\right]\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{c} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)c\right]\cancel{\frac{\partial z}{\partial t}}^{-c}$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\right) - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

حال در معادله اصلی جایگذاری می کنیم

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

$$\rightarrow u(v,z) = \int h(v)\,dv + \psi(z) = \varphi(v) + \psi(z)$$

$$\rightarrow u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Initial condition 1 : $u(x,0) = f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ (1)

SAMAND

Initial Condition 2 : $u_t(x,0) = 0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=0}$

$= c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{t=0} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) + k \qquad (2)$

$(1),(2) \rightarrow \begin{cases} \psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - k) \\ \varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + k) \end{cases} \qquad (3)$

$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \qquad (4)$ تمرین :

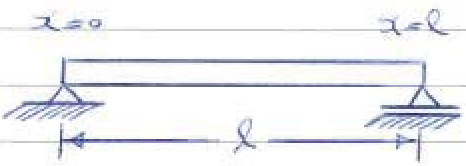
$(3),(4) \rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct)+k) - \frac{1}{2}(f(x-ct)+k)$

$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct))$

if $u_t(x,0) = g(x)$

$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds\right]$

تمرین : تیری بصورت زیر مفروض است. معادله ارتعاش آن بصورت $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ می باشد.
شرایط اولیه و مرزی بصورت زیر می باشد



$u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0$

$u_{xx}(0,t) = 0 \qquad u_{xx}(l,t) = 0$

$u_t(x,0) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$

معادله این ارتعاش را حل نمایید.

Subject:

Year: Month: Day:

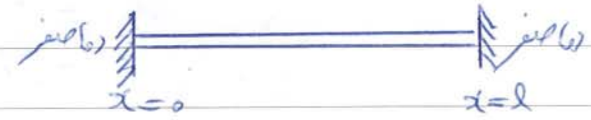
$$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}} \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

۵) معادله جریان حرارت (حل به روش جداسازی متغیرها):

جریان حرارت در درون بدنه یک جسم همگن براساس معادله حرارت به فرم فوق بیان می شود:
در این معادله u تابع دما است. x طول و t زمان می باشد.
شرایط مرزی و ابتدایی به صورت زیر می باشد:

$$u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$$

$$\text{Boundary Condition} \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases}$$



Initial Condition: $u(x,0) = f(x)$

$$F G_t = c^2 F_{xx} \cdot G$$

دو طرف را بر c^2FG تقسیم می کنیم.

$$\frac{F_{xx}}{F} = \frac{G_t}{c^2 G} = K$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_{xx} - FK = 0 \\ G_t - Kc^2 G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{xx} - Fk = 0 \\ F(0)=0 \ , \ F(l)=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad n=1,2,3,\dots$$

$$G_t + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 G = 0$$

$$\rightarrow G_n = B_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t}$$

$$\rightarrow u(x,t) = \sum_1^\infty u_n(x,t) = \sum_1^\infty B_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Subject:

Year: Month: Day:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

مثال ٥ اگر تابع دما در ابتدای زمان بصورت $f(x) = 100 \sin \frac{\pi x}{80}$ باشد. طول میله $l = 80^{cm}$ و دماهای دو انتهای میله صفر باشد. بدنه میله عایق بندی شده و $c^2 = 1.158$ باشد معادله حرارت را حل نمایید. ماکزیمم دما را محاسبه نمایید. تعیین طول می کشد تا حداکثر دما به 50 درجه برسد.

حل الف)

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{80}$$

$$G_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{80}\right)^2 t}$$

$$B_n = \frac{2}{80} \int_0^{80} \left(100 * \sin \frac{\pi x}{80}\right) \sin \frac{n\pi x}{80}\, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\rightarrow B_n = \begin{cases} 100 & n = 1 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

دلیل $\sin \frac{\pi x}{80}$, $\sin \frac{m\pi x}{80}$ با شرط $m \neq n$, از 0 تا 80 متعامد است.

$$u(x,t) = 100 \sin \frac{\pi x}{80} e^{-0.001785 t}$$

حل ب)

$$u_{Max} = 100$$

حل ج)

$$u(x_0, t_0) = 50$$

با توجه به $u(x,t)$ حداکثر در وسط رخ می دهد.

$$\rightarrow u(40, t_0) = 50 \rightarrow 100 e^{-0.001785 t} = 50 \rightarrow t_0 = 388^{sec} = 6.5^{min}$$

تمرین ٥ مثال بالا را با $f(x) = 100 \sin \frac{3\pi x}{80}$ حل نمایید (تحویلی نیست)

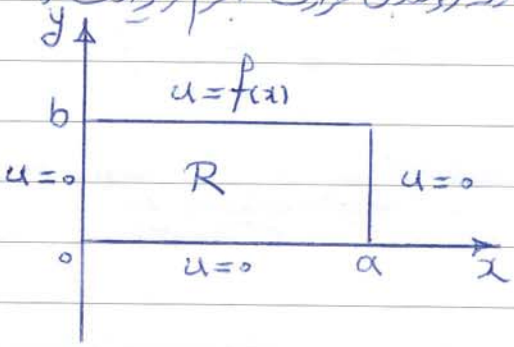
اگر جریان حرارت درون سیستم پایدار شود، به این منظور است که حرارت مستقل از تغییرات زمان است، به عبارت دیگر $\partial u/\partial t=0$ می باشد. در این حالت معادله حرارت به معادله لاپلاس تبدیل می گردد.

Subject:

Year: Month: Day:

۵-۶) جریان حرارت پایدار دو بعدی:

معادله دو بعدی حرارت به فرم زیر است:



$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

$$u = u(x,y,t)$$

u: تابع دما است برحسب x و y (بعد)، t (زمان)

شرایط مرزی به گونه ای است که در ۳ لبه تابع دما صفر است و یک لبه دمای پایدار و ثابت داریم.

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

پایدار بودن به این معنا است که آنقدر صبر می کنیم تا دما نسبت به زمان تغییری نکند.

$$(1),(2) \longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

از روش جداسازی متغیرها برای حل استفاده می کنیم:

$$u(x,y) = F(x)\cdot G(y)$$

$$\rightarrow F_{xx}\cdot G + F\,G_{yy} = 0$$

③ $\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$ $\begin{cases} u(0,y)=0,\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=f(x) \end{cases}$

$$\rightarrow \frac{F_{xx}}{F} = \frac{-G_{yy}}{G} = k$$

$$F_{xx} - kF = 0 \qquad G_{yy} + kG = 0$$

شرایط مرزی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u(0,y) = 0 \rightarrow F(0)G(y) = 0 \rightarrow F(0) = 0 \\ u(a,y) = 0 \rightarrow F(a)G(y) = 0 \rightarrow F(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \rightarrow F(x)G(0) = 0 \rightarrow G(0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \rightarrow F(x)G(b) = f(x) \end{cases}$$

$$F_{xx} - kF = 0 \quad (F(0)=0,\ F(a)=0)$$

در حل معادله $F(x)$ بدست می آید:

$$\begin{cases} k = 0 \longrightarrow F(x) = 0 \\ k = p^2 \longrightarrow F(x) = 0 \\ k = -p^2 \longrightarrow \begin{cases} F_{xx} + p^2F = 0 \\ G_{yy} - p^2G = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\rightarrow F(x) = A\cos px + B\sin px \xrightarrow[F(a)=0]{F(0)=0} A = 0,\ B\sin p = 0$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$\longrightarrow p = \frac{n\pi}{a} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Longrightarrow F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

در ادامه به حل معادله $G(y)$ می‌پردازیم:

$$G_{yy} - p^2 G = 0 \qquad (G(0) = 0)$$

با قرار دادن مقدار p جواب زیر بدست می‌آید:

$$G_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \qquad (3)$$

$$G(0) = 0 \longrightarrow A_n + B_n = 0 \longrightarrow A_n = -B_n \qquad (4)$$

$$(3),(4) \Longrightarrow G_n(y) = 2A_n \sinh \frac{n\pi y}{a} = A_n^* \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = \sum_1^\infty u_n(x,y) = \sum_1^\infty F_n(x)\, G_n(y) = \sum_1^\infty A_n^* \sinh\frac{n\pi y}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

با اعمال شرط مرزی چهارم در $y=b$، A_n^* محاسبه می‌شود:

$$u(x,b) = f(x) = F(x)\, G(b)$$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_1^\infty \left(A_n^* \sinh \frac{n\pi b}{a}\right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = \displaystyle\sum_1^\infty A_n^* \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a} \\ A_n^* = \dfrac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \displaystyle\int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

فرم کلی روش جداسازی متغیرها یکی است و تنها جواب‌ها بسته به شرایط فرق دارد.

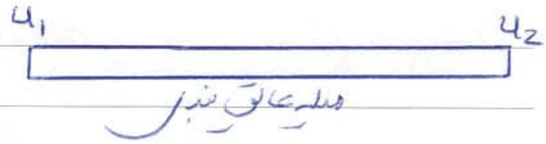
در جریان حرارت پایدار یک بعدی به بررسی دو حالت زیر با شرایط مرزی مختلف می‌پردازیم و روش حل را ارائه می‌کنیم.

2

$$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}}$$

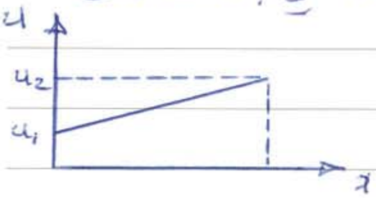
الف) در این حالت فرض بر این است که دمای ابتدا و انتهای میله عایق بندی شده به طول l در طول زمان بدون تغییر مساوی u_1 و u_2 است. حال به دنبال محاسبه تابع حرارت داخل میله پس از گذشت زمان زیاد ($t\to\infty$) هستیم.

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad (5)$$



شرایط مرزی
$$\begin{cases} u(0,t) = u_1 & (6) \\ u(l,t) = u_2 & (7) \end{cases}$$

در این مسئله اجازه داده می‌شود که شرایط پایدار دما در میله ایجاد گردد. یعنی با گذشت زمان زیاد و تغییرات تابع دما نسبت به زمان صفر است. پس:



② $$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}} \begin{cases} u(0,t) = u_1 \\ u(l,t) = u_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \longrightarrow c^2 u_{xx} = 0 \longrightarrow u(x) = c_1 x + c_2$$

با قرار دادن شرایط مرزی ابتدا و انتهای میله بدست می‌آید:

$$\Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{l}(u_2 - u_1)x + u_1$$

ب) در این حالت تابع اولیه حرارتی $f(x)$ را برای حالت بالا در نظر می‌گیریم ($u(x,0)=f(x)$). حال می‌خواهیم نشان دهیم که دما در هر نقطه از میله در زمان $t>0$ به صورت زیر می‌باشد که $U(x)$ برای شرایط مرزی ناهمگن و $v(x,t)$ برای شرایط مرزی همگن در نظر گرفته شده است:

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x) \qquad (8)$$

حالت پایداری دما

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u_1 \\ u(l,t) = u_2 \\ u(x,0) = f(x) & (9) \end{cases}$$

② $$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}} \begin{cases} u(0,t) = u_1 \\ u(l,t) = u_2 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

با قرار دادن رابطه (8) در رابطه (5) بدست می‌آید:

$$v_t = c^2 v_{xx} + c^2 U_{xx} \qquad (10)$$

حال شرایط مرزی (6)، (7) و (9) را در رابطه (8) اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} u_1 = v(0,t) + U(0) & (11) \\ u_2 = v(l,t) + U(l) & (12) \\ f(x) = v(x,0) + U(x) & (13) \end{cases}$$

حمید کاظم

(معادلات غیرهمگن از کتاب Mint-U ارائه می شود)

Subject:

Year: Month: Day:

از (10)، (11)، (12) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c^2 U_{xx} = 0 \\ U(0) = u_1 \\ U(l) = u_2 \end{cases}$$

بر اساس حالت الف برای $U(x)$ داریم:

$$\rightarrow U(x) = \frac{1}{l}(u_2 - u_1)x + u_1$$

براساس رابطه (13) داریم:

$$f(x) = u(x,0) + U(x)$$

$$\rightarrow u(x,0) = f(x) - U(x)$$

طبق جواب معادله جریان حرارت (قسمت هـ-۵) بدست می آید:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t} \\ B_n = \frac{2}{l}\int_0^l [f(x) - U(x)] \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx \end{cases}$$

هـ-۷) مسائل غیرهمگن:

مسائل دیفرانسیل پاره ای که تا به حال مورد بررسی قرار گرفته اند همگن دارای شرایط مرزی و معادلات همگن بودند. حل معادلات غیرهمگن و شرایط مرزی غیرهمگن را مورد بررسی قرار می دهیم. در ابتدا معادله غیرهمگن که فقط تابعی از x است مورد بررسی قرار می گیرد. برای حل چنین معادله ای با فرض زیر شروع می کنیم:

a) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x) \quad (0 < x < l,\ t > 0)$

$$\begin{cases} u(0,t) = A \\ u(l,t) = B \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x)$$

دلیل اینکه $U(x)$ را برحسب x گرفتیم این است که F، f، g هم برحسب x هستند.

تابع $U(x)$ برای ارضا شرایط غیرهمگن معادله اصلی و شرایط غیرهمگن مرزی در $x=0$، $x=l$ در نظر گرفته شده است.

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + c^2 U_{xx} + F(x)$$

$$\begin{cases} A = v(0,t) + U(0) \\ B = v(l,t) + U(l) \\ f(x) = v(x,0) + U(x) \\ g(x) = v_t(x,0) \end{cases}$$

Subject:

Year: Month: Day:

شرایط همگن را به V اختصاص می‌دهیم و غیرهمگن را به U می‌دهیم. یعنی:

$$V_{tt} = c^2 V_{xx}$$

$$\begin{cases} V(0,t)=0 \quad V(l,t)=0 \\ V(x,0)=f(x)-U(x) \\ V_t(x,0)=g(x) \end{cases} \qquad c^2 U_{xx} + F(x) = 0 \qquad \begin{cases} U(0)=A \\ U(l)=B \end{cases}$$

بدین ترتیب تابع $U(x)$ مستقلاً محاسبه می‌شود و تابع $V(x,t)$ مشابه حالت‌هایی که تا به حال حل شده است بدست می‌آید. در نهایت پاسخ $u(x,t)$ مجموع دو تابع مذکور خواهد بود.

مثال: فرض کنید $A=B=0$ باشد، و $F(x)=h$ است. معادله زیر را حل نمایید

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x) \qquad u_t(x,0)=0$$

$$U(x) = \frac{h}{2l^2}(lx - x^2)$$

$$u(x,0) = f(x) - U(x)$$

$$\rightarrow V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \dfrac{-4l^2 h}{n^2\pi^3 c^2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

حال حالتی را بررسی می کنیم که بخش غیرهمگن معادله دیفرانسیل یا ره[؟] تابعی از x و t باشد، یعنی :

b) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) \qquad (0<x<l \ , \ t>0)$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

این مسئله را می توان با ترکیب سری فوریه حل نمود. از آن جا که شرایط مرزی صفر در $x=0$ و $x=l$ برای معادله همگن به تابع همگن $F_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$ منتهی می شود، می توان فرض نمود که تابع $u(x,t)$ بصورت مقابل است :

$$u(x,t)=\sum_{1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (1)$$

که تابع $u_n(t)$ مجهول است و باید محاسبه شود.

بدین ترتیب تابع $h(x,t)$ نیز بصورت سری فوریه سینوسی بصورت مقابل ترتیب داده می شود.

$$\begin{cases} h(x,t)=\sum_{1}^{\infty} h_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (2) \\ h_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l h(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \end{cases}$$

در این مسائل $h(x,t)$ را کنار می گذاریم، معادله همگن را حل می کنیم و سپس $h(x,t)$ را برحسب جواب معادله همگن بسط می دهیم.

با قرار دادن روابط (1) و (2) در رابطه اصلی به رابطه زیر می رسیم

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty}\left[u_n''(t)+\lambda_n^2 u_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

که $\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$ است. اگر از شرایط استقلال خطی استفاده شود و طرفین رابطه بالا در $\sin\frac{m\pi x}{l}$ برای $m=1,2,3,\dots$ ضرب شود و در فاصله $0<x<l$ انتگرال گرفته شود بدست می آید :

$$u_n''(t)+\lambda_n^2 u_n(t)=h_n(t)$$

پاسخ $\longrightarrow$ $u_n(t)=\underbrace{A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t}_{\text{همگن}}+\underbrace{\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t h_n(\tau)\sin[\lambda_n(t-\tau)]\,d\tau}_{\text{جواب خصوصی}}$

ضمناً از روش به کارگیری shape function استفاده کردیم.

حال مقادیر A_n , B_n را می‌خواهیم. با اعمال شرایط اولیه بدست می‌آید:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{l} \rightarrow B_n = \frac{2}{\lambda_n l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

بنابراین:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}) \\ u_n(t) = A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t h_n(\tau) \sin[\lambda_n (t-\tau)] d\tau \\ h_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l h(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \qquad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ \qquad\qquad B_n = \frac{2}{\lambda_n l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{cases}$$

حال مجدداً مسئله را برای شرایط مرزی غیر صفر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

c) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) \qquad (0 < x < l \ , \ t > 0)$

$$\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(l,t) = q(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

تابع u را بصورت زیر پیشنهاد می‌دهیم که تابع $U(x,t)$ برای ارضا کنندگی غیرهمگن شرایط مرزی تعریف شده است:

$$u(x,t) = V(x,t) + U(x,t)$$

$$\rightarrow V_{tt} + U_{tt} = c^2 V_{xx} + c^2 U_{xx} + h(x,t)$$

$$\begin{cases} V(0,t) + U(0,t) = p(t) \\ V(l,t) + U(l,t) = q(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} V(x,0) + U(x,0) = f(x) \\ V_t(x,0) + U_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

الف) با فرض زیر به محاسبه $U(x,t)$ می‌پردازیم:

$$c^2 U_{xx} = 0 \quad , \quad \begin{cases} U(0,t) = p(t) \\ U(l,t) = q(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow U(x,t) = p(t) + \frac{x}{l} (q(t) - p(t))$$

با جایگذاری این ترم در رابطه اصلی، معادله دیفرانسیل پاره‌ای برحسب تابع $V(x,t)$ اصلاح می‌شود:

Subject:

Year: Month: Day:

ب) برای $V(x,t)$ داریم:

$$V_{tt} - c^2 V_{xx} = h(x,t) - U_{tt} = H(x,t)$$

$$\begin{cases} V(0,t) = 0 \\ V(l,t) = 0 \end{cases}$$

باید H را برحسب sin بسط دهیم.

$$\begin{cases} V(x,0) = f(x) - U(x,0) = F(x) \\ V_t(x,0) = g(x) - U_t(x,0) = G(x) \end{cases}$$

این روابط مشابه حالت قبل است که روش حل آن مشخص شده است.

تمرین ۱۸: معادله زیر را حل نمایید.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h$$

(می توان تابع h را بسط نداد و حل نمود)

$$\begin{cases} u(0,t) = t \\ u(l,t) = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = x(1-x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

۵-۸) جریان حرارت در یک میله بی‌نهایت:

در مسئله جریان حرارت یک میله بی‌نهایت شرایط مرزی توقف نمی‌شود، بلکه فقط شرایط اولیه داریم. با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad (1)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (2) \qquad -\infty < x < \infty$$

② $\boxed{u_t = c^2 u_{xx}}$ $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ -\infty < x < \infty \end{cases}$

$$u(x,t) = F(x) . G(t)$$

$$\begin{cases} F_{xx} + p^2 F = 0 & (3) \\ G_t + c^2 p^2 G = 0 & (4) \end{cases}$$

از حل رابطه (3) داریم:

از حل رابطه (4) داریم:

$$\begin{cases} F(x,p) = A\cos px + B\sin px & (5a) \\ G(t,p) = e^{-c^2 p^2 t} & (5b) \end{cases}$$

Subject:

Year: Month: Day:

$$\rightarrow u(x,t,p) = [A\cos px + B\sin px]\, e^{-c^2p^2t}$$

اگر فرض بر این باشد که p مقادیر گسسته باشند نمی‌باید حالت تناوبی منظم داشته باشیم بجای آنکه جمع بست بین از انتگرال باید استفاده نمود. از آن جا که کلیه pها می‌توانند پاسخ‌ها را در دیفرانسیل پاره‌ای در فیلد بی‌نهایت داشته باشند:

$$u(x,t) = \int_0^p u(x,t,p)\,dp$$

در این تعریف به جای استفاده از تعریف سری فوریه از تعریف انتگرال فوریه استفاده شده است، چرا که تعریف سری فوریه در زمان $t=0$ به تابع تناوبی منتهی می‌گردد که تابع $f(x)$ چنین نیست.

$$\rightarrow u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty (A\cos px + B\sin px)\,dp$$

$$\rightarrow A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv\,dv$$

$$\rightarrow B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv\,dv$$

$$\rightarrow u(x,t) = \int_0^p [A(p)\cos px + B(p)\sin px]\, e^{-c^2p^2t}\,dp$$

با اعمال $A(p)$ و $B(p)$ در رابطه بالا، سعی می‌کنیم تا ترم p را از رابطه حذف کنیم. در نهایت تابع جریان حرارت به فرم زیر بدست می‌آید:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left[-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right]dv$$

۵-۹) ارتعاش غشاء نازک یا معادله موج دو بعدی:

معادله ارتعاش غشاء نازک یا انتشار موج دو بعدی به شکل فوق می‌باشد.

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad (1)$$

گام اول: جداسازی متغیرهای زمانی و مکانی می‌باشد

$$u(x,y,t) = F(x,y)\,G(t) \quad (2)$$

$$\Rightarrow FG_{tt} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G) \quad (3)$$

این مسئله را می‌توان بر روی مرز محصلی با چیرهمن مستطیلی مورد بررسی قرار داد.

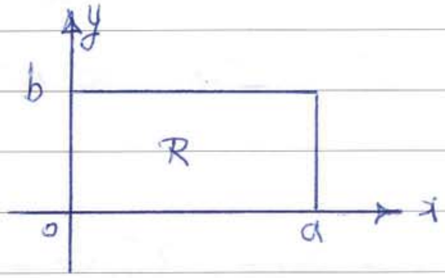
شرایط مرزی روی کلیه مرزها: $u = 0$

شرایط اولیه: $u(x,y,0) = f(x,y)$ $\quad u_t(x,y,0) = g(x,y)$

$$\rightarrow \frac{G_{tt}}{c^2 G} = \frac{F_{xx} + F_{yy}}{F} = -\nu^2 \qquad (4)$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0 & (5) \\ G_{tt} + c^2 \nu^2 G = 0 & (6) \end{cases}$$

معادلهٔ دو بعدی هلمهولتز



حال رابطه (5) را با روش جداسازی متغیرها حل می‌کنیم. پس:

$$F(x,y) = H(x) \cdot Q(y) \qquad (7)$$

$$\Rightarrow H_{xx} Q + H Q_{yy} + \nu^2 H Q = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{H} H_{xx} = \frac{-1}{Q} (Q_{yy} + \nu^2 Q)$$

گام دوم: در این گام به اعمال شرایط مرزی می‌پردازیم:

$$\begin{cases} u(0,y,t) = 0 = H(0) Q(y) G(t) \\ u(a,y,t) = 0 = H(a) Q(y) G(t) \\ u(x,0,t) = 0 = H(x) Q(0) G(t) \\ u(x,b,t) = 0 = H(x) Q(b) G(t) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} H(0) = 0 \\ H(a) = 0 \\ Q(0) = 0 \\ Q(b) = 0 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \frac{1}{H} H_{xx} = \frac{-1}{Q} (Q_{yy} + \nu^2 Q) = -k^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} H_{xx} + k^2 H = 0 \\ Q_{yy} + p^2 Q = 0 \end{cases} \qquad p^2 = \nu^2 - k^2$$

$$\begin{cases} H(x) = A \cos kx + B \sin kx \\ Q(y) = C \cos py + D \sin py \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(x) = \sin \frac{m\pi x}{a} & m = 1, 2, 3, \dots & \rightarrow k = \frac{m\pi}{a} \\ Q(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} & n = 1, 2, 3, \dots & \rightarrow p = \frac{n\pi}{b} \end{cases}$$

آنگاه توابع $F(x,y)$ چنین خواهند شد:

$$F_{mn}(x,y) = H_m(x) Q_n(y)$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$\Rightarrow F_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad m,n = 1,2,3,\dots$$

$$\mu^2 = p^2 + k^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2$$

$$\lambda_{mn}^2 = c^2\mu^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \qquad m = 1,2,\dots \quad n = 1,2,\dots$$

تابع $G(t)$ نیز بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\Rightarrow G_{tt} + \lambda_{mn}^2 G = 0 \longrightarrow G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^*\sin\lambda_{mn}t$$

گام سوم: در این گام به حل کل مسئله می‌پردازیم:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^*\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{n\pi y}{b}\,\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$$

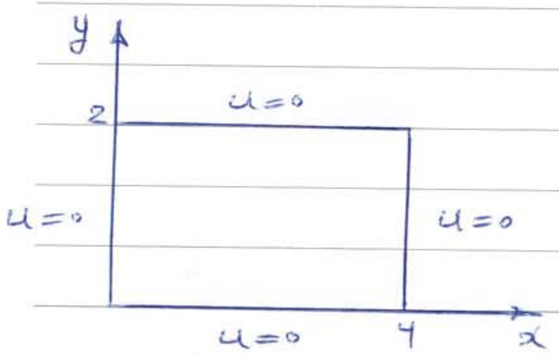
شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم و به سری دوبل فوریه می‌رسیم:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,\sin\frac{m\pi x}{a}\,dy\,dx \qquad m,n = 1,2,\dots$$

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,\sin\frac{m\pi x}{a}\,dy\,dx \qquad m,n = 1,2,\dots$$

مثال: ارتعاش پوسته نازک با شرایط زیر مفروض است.



$$c^2 = 5$$

$$f(x,y) = 0.1(4x - x^2)(2y - y^2)$$

$$g(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \qquad t > 0$$

Subject:

Year: Month: Day:

$$u(x,y,t) = \sum \sum \left(B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B^*_{mn} \sin \lambda_{mn} t \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx\, dy \qquad m,n = 1,2,\dots$$

$$= \frac{1}{20} \underbrace{\left(\int_0^4 (4x - x^2) \sin \frac{m\pi x}{4} \, dx \right)}_{I_1} \underbrace{\left(\int_0^2 (2y - y^2) \sin \frac{n\pi y}{2} \, dy \right)}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{128}{(m\pi)^3} \left[1 - (-1)^m \right]$$

$$I_1 = \begin{cases} 0 & \text{زوج } m \\ \dfrac{256}{(m\pi)^3} & \text{فرد } m \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{16}{(n\pi)^3} \left[1 - (-1)^n \right] = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \dfrac{32}{(n\pi)^3} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\rightarrow B_{mn} = \frac{1}{20} \; \frac{256 \times 32}{\pi^6 m^3 n^3} \qquad m,n = 1,3,5,\dots$$

$$B^*_{mn} = 0$$

لاپلاسین در دستگاه مختصات قطبی.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(x,y) = u(r,\theta)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ y/x = \operatorname{tg}\theta \end{array}$$

حمید کاظم

$$x = r\cos\theta \rightarrow 1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta + r(-\sin\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$x^2+y^2=r^2 \rightarrow 2r\cos\theta = 2x = 2r\,\partial r/\partial x \Rightarrow \partial r/\partial x = \cos\theta$$

$$x^2+y^2=r^2 \rightarrow 2r\sin\theta = 2y = 2r\,\partial r/\partial y \Rightarrow \partial r/\partial y = \sin\theta$$

$$x = r\cos\theta \rightarrow 1 = \partial r/\partial x \cos\theta - r\sin\theta\, \partial\theta/\partial x \Rightarrow \partial\theta/\partial x = -1/r \sin\theta$$

$$y = r\sin\theta \rightarrow 1 = \partial r/\partial y \sin\theta + r\cos\theta\, \partial\theta/\partial y \Rightarrow \partial\theta/\partial y = 1/r \cos\theta$$

$$\partial u/\partial x = \partial u/\partial r \cdot \partial r/\partial x + \partial u/\partial\theta \cdot \partial\theta/\partial x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \partial/\partial r\,(\partial u/\partial x)\,\partial r/\partial x + \partial/\partial\theta\,(\partial u/\partial x)\,\partial\theta/\partial x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta + \frac{1}{r^2}u_\theta \sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r}u_r\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}u_\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{rr}\sin^2\theta - \frac{1}{r^2}u_\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r}u_r\cos^2\theta + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\cos^2\theta - \frac{1}{r^2}u_\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = u_{rr} + 1/r\, u_r + 1/r^2\, u_{\theta\theta}$$

Kreyzig

کاربرد تبدیل فوریه در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای :

مسئله انتقال حرارت در راستای محور x ها.

میله عایق بندی است و شرایط زیر را دارد.

$$u(x,0) = f(x)$$

$$|x| \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} u(x,t) \\ u_x(x,t) \end{cases} \rightarrow 0$$

حمید کاظمی

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad t > 0$$

چون x تغییرات بین ∞+ ، ∞− دارد پس تبدیل را روی آن می‌بریم.

$$F\{u_t\} = c^2 F\{u_{xx}\}$$
$$= c^2 (i\omega)^2 F\{u\}$$
$$= -c^2 \omega^2 \hat{u} \qquad (1)$$

$$F\{u\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx = \hat{u}(\omega,t)$$

$$F\{u_t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx \right\}$$
$$= \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2 \omega^2 \hat{u} \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + c^2 \omega^2 \hat{u} = 0$$
$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\, e^{-c^2 \omega^2 t}$$

حال به دنبال محاسبه $A(\omega)$ هستیم. به سراغ شرایط اولیه می‌رویم.

$$F\{u(x,0)\} = F\{f(x)\} \rightarrow \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$$

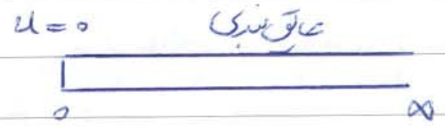
$$\rightarrow A(\omega) = \hat{f}(\omega)$$
$$\rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-c^2 \omega^2 t}$$

$$\rightarrow u(x,t) = F^{-1}\{\hat{u}(\omega,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-c^2 \omega^2 t}\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

Subject:

Year: Month: Day:

مسئله ای با شرایط زیر را در نظر بگیرید.



$0 < x < \infty \;,\; t > 0$

$u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = 0$

$$|x| \to 0 \implies \begin{cases} u(x,t) \\ u_x(x,t) \end{cases} \to 0$$

بسته به شرایط ابتدایی از تبدیل سینوسی استفاده می‌کنیم.

$$F_s\{u_t\} = c^2 F_s\{u_{xx}\}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} = -c^2\omega^2 \hat{u}_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega u(0,t) \implies \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} + c^2\omega^2 \hat{u}_s = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \hat{u}_s(\omega,t) = A(\omega) e^{-c^2\omega^2 t} \\ &\hat{u}_s(\omega,0) = \hat{f}_s(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(\omega) = \hat{f}_s(\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_s(\omega,t) = f_s(\omega) e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$\to u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t} \sin \omega x \, dx$$

حل معادله موج

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad (-\infty < x < +\infty \;,\; t > 0)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) = 0 \end{cases} \qquad |x| \to \infty \implies \begin{cases} u \\ u_x \end{cases} \to 0$$

Subject:

Year: Month: Day:

اگر شرط اولیه مرزی را نداشتیم فرض ساده‌ای را انجام می‌دهیم و در آخر جواب را با فرض‌ها کنترل می‌کنیم.

$$F\{u_{tt}\} = c^2 F\{u_{xx}\}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -c^2 \omega^2 \hat{u}(\omega,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + c^2\omega^2 \hat{u}(\omega,t) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t$$

$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(\omega) = \hat{f}(\omega) \\ c\omega B(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\cos\omega t$$

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega)\left(e^{-i\omega tc} + e^{i\omega tc}\right)$$

داشتیم:

$$F\{f(x-a)\} = e^{-i\omega a} F\{f(x)\}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right]$$

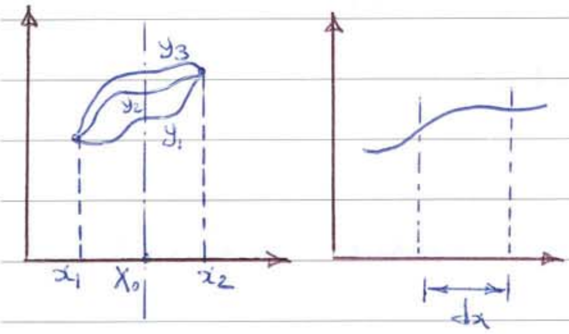
این همان چیزی است که دالامبر به دست آورد.

فصل ششم

«حساب تغییرات و کاربردهای آن»
"Calculus of Variation"

۶-۱) تعریف:

در حساب دیفرانسیل راجع به متغیر مستقل و در حساب تغییرات راجع به تابع ناشناخته صحبت می‌شود.



حساب دیفرانسیل می‌گویند اگر x را به اندازه dx تغییر دهیم تابع چه می‌شود. در حساب تغییرات دنبال تابعی هستیم که خصوصیت خاصی در فاصله x_1 تا x_2 داشته باشد. یعنی در ($x_1 < X_0 < x_2$) ثابت تغییرات در توابع y_1، y_2، y_3 به چه صورتی است.

نام این روش حساب تغییرات در بهینه‌سازی کاربرد دارد.

۱) معادله تعادل سیستم تحت شرایط تغییری ⟷ Min {انرژی مشخصه‌ی سازه} (1)

۲) معادله فیزیکی مسئله ⟵ حل تقریبی انتگرال (2)

۳) حل تقریبی معادلات دیفرانسیل ⟵ روش باقیمانده وزن‌دار

مباحث پیش‌نیاز:

اگر تابع $f(x)$ را داشته باشیم و دنبال مقادیر Min، Max باشیم شرط لازم این است که $\frac{df}{dx}=0$ باشد. شرط کافی این است که:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \begin{cases} >0 & \text{Min} \\ <0 & \text{Max} \end{cases}$$

ما در حساب تغییرات با شرط لازم سروکار داریم.

اگر بخواهیم Max یا Min تابع چند متغیره $f(x,y,z)$ را محاسبه کنیم داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{شیب}} * \underbrace{dx}_{\text{طول}} = \text{ارتفاع}$$

چون در فضای سه بعدی x و y و z مستقل هستند:

$$\begin{aligned} \partial f/\partial x &= 0 \\ \partial f/\partial y &= 0 \\ \partial f/\partial z &= 0 \end{aligned} \longrightarrow (x,y,z)$$

اگر بخواهیم تابع $f(x,y,z)$ را Minimize یا Maximize کنیم با این شرط که روابط $\varphi_1(x,y,z)=0$ و $\varphi_2(x,y,z)=0$ را داشته باشیم آنگاه:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \qquad (1)$$

چون در قید و شرط تعریف شده آنگاه dx ، dy ، dz مستقل نخواهند بود. پس تغییرات φ_1 ، φ_2 را بررسی می‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}dz = \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}dz = 0 \end{cases}$$

در اینجا dx ، dy را برحسب dz می‌نویسیم نهایتاً رابطه (1) بصورت زیر می‌شود:

$$\{\overset{\varphi_3}{\sim}\}\, dz = 0 \qquad (2)$$

براساس روابط (2) ، φ_1 ، φ_2 داریم

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow (x,y,z)$$

مثال: بر روی منحنی تلاقی دو رویه بصورت $x+y+z=1$ ، $z=xy+5$ نقطه (یا نقاط) با کمترین فاصله از مبدأ مختصات را بیابید.

فاصله تا مبدأ $f = x^2+y^2+z^2$

اگر هیچ قیدی نداشتیم .

$$f(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0$$

$$2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz=0 \quad (1) \quad \rightarrow \quad x=y=z=0$$

این که ترکیب فاصله تا مبدأ هستش.
اما چون قید داریم.

$$\begin{cases}\varphi_1=z-xy-5=0\\ \varphi_2=x+y+z-1=0\end{cases}$$

$$d\varphi_1=0 \Rightarrow (-y)dx+(-x)dy+(1)dz=0 \quad (2)$$
$$d\varphi_2=0 \Rightarrow (1)dx+(1)dy+(1)dz=0 \quad (3)$$

می‌توان ۳ معادله و سه مجهول حل نمود یا از روش ضرایب لاگرانژ استفاده نمود. یا اینکه هر قید را در ضرایب λ_1 و λ_2 ضرب نموده و با رابطه (1) جمع می‌کنیم.

$$(2x-\lambda_1 y+\lambda_2)dx+(2y-\lambda_1 x+\lambda_2)dy+(2z+\lambda_1+\lambda_2)dz=0$$

$$\begin{cases}2x-\lambda_1 y+\lambda_2=0 & (4)\\ 2y-\lambda_1 x+\lambda_2=0 & (5)\\ 2z+\lambda_1+\lambda_2=0 & (6)\\ \varphi_1=0 & (7)\\ \varphi_2=0 & (8)\end{cases}$$

ضرایب لاگرانژ را به صورتی وارد می‌کنیم که دو ترم اول صفر شود. وقتی دو ترم اول صفر شد ترم سوم هم محکوم به صفر شدن است. حال با پنج معادله و ۵ مجهول داریم.

اگر λ_1 و λ_2 از سه رابطه (4)، (5)، (6) حذف کنیم

$$\begin{cases}x=y & (I)\\ x+y-z+1=0 & (II)\end{cases}$$

$(I),(7),(8) \rightarrow$ غیرممکن

$(II),(7),(8) \rightarrow (2,-2,1)\ ,\ (-2,2,1)$

$$\Rightarrow f=9$$

Subject:
Year: Month: Day:

ضرایب لاگرانژ

قیدها را با ضرایب مجهول لاگرانژ در تابع اصلی اضافه می‌کنیم. سعی می‌کنیم مشتق‌ها را جمع کنیم و مجهول لاگرانژ را حذف کنیم.

$$f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0$$

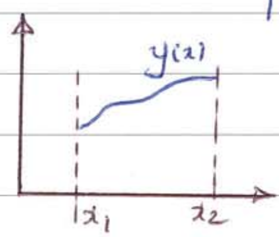
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right] dx$$

$$+ \left[\qquad\qquad\qquad\right] dy$$

$$\left[\qquad\qquad\qquad\right] dz$$

حساب تغییرات:

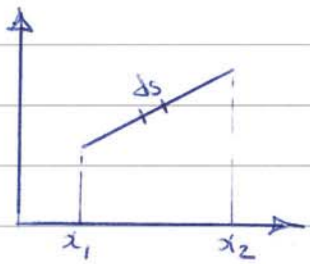
تابعی بین x_1 و x_2 را پیدا می‌کنیم می‌خواهیم مشخصاتی از تابع را بررسی کنیم.



$$\begin{cases} \text{Min} \\ \text{Max} \end{cases} \quad I(y) = ?$$

$$\begin{matrix}\text{Min} \\ \text{Max}\end{matrix} \quad I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \qquad (1)$$

مثال: سطح کمینه حاصل از دوران یک منحنی را بدست آورید.



$$dA = y\,(2\pi y)\, ds$$

محیط دایره ناشی از دوران

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad ds = (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

$$\rightarrow dA = 2\pi y\,(1 + y^2)^{1/2} dx$$

$$\rightarrow I(y) = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\,(1 + y'^2)^{1/2} dx$$

کلی تابع انتگرالی داریم که صریح نیست.

$\hat{y} = y + \varepsilon \eta$ انتخابی

$$I(\hat{y}) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \hat{y}, \hat{y}')\, dx$$

$$I(\hat{y}) = I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \hat{y}, \hat{y}')\, dx$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{d\varepsilon}\, dx = 0$$

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \cdot \underbrace{\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}}_{\eta} + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \cdot \underbrace{\frac{d\hat{y}'}{d\varepsilon}}_{\eta'}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \cdot \eta' \right] dx = 0$$

اگر $\varepsilon \to 0$ جواب بدست می‌آید پس:

$$\varepsilon \to 0 : \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx = 0$$

با استفاده از جزء به جزء بدست می‌آوریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta\, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta\, dx = 0$$

طبق قضیه بنیادی حساب تغییرات وقتی که η اختیاری باشد

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

این معادله شرط لازم پایدار شدن معادله اصلی (1) است. به این معادله، معادله اویلر گویند.

ریاضیات عالی مهندسی

استاد : جناب آقای دکتر بهار

دانشجو : حمید کاظم(۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری ...اول............

تمرین ۱: نشان دهید:

1) $(U, V)_H = (\bar{V}, \bar{U})_H$

2) $\overline{(U, V)_H} = (V, U)_H$

حل:

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} \qquad V = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{Bmatrix}$$

1) $$(U, V)_H = U^T . \bar{V} = \{ u_1, u_2, \dots, u_m \} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{Bmatrix}$$

$$= u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_m \bar{v}_m = \bar{v}_1 u_1 + \bar{v}_2 u_2 + \dots + \bar{v}_m u_m$$

$$= \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} = \bar{V}^T . U = (\bar{V}, \bar{U})_H$$

۲) $A = (U, V)_H$

$$\rightarrow A = U^T . \bar{V} = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_m \bar{v}_m$$

$$\overline{(U, V)_H} = \bar{A} = \bar{u}_1 . v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \dots + \bar{u}_m v_m$$

$$= v_1 . \bar{u}_1 + v_2 . \bar{u}_2 + \dots + v_m \bar{u}_m$$

$$= \{ v_1, v_2, \dots, v_m \} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{Bmatrix} = V^T . \bar{U} = (V, U)_H$$

استاد : جناب آقای دکتر بهار

دانشجو : حمید کاظم(۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری ......اول..........

تمرین ۲ ه

Charles Hermite

Born: 24 Dec 1822 in Dieuze, Lorraine, France
Died: 14 Jan 1901 in Paris, France

Charles Hermite's father was Ferdinand Hermite and his mother was Madeleine Lallemand. Ferdinand Hermite was a trained engineer and he worked in this capacity in a salt mine near Dieuse. After he married Madeleine he joined in the draper's trade in which her family were involved. However he was an artistic man who always wanted to pursue art as a career. He had his wife look after the draper's business and he took up art. Charles was the sixth of his parents seven children and when he was about seven years old his parents left Dieuse and went to live in Nancy to where the business had moved.

Education was not a high priority for Charles's parents but despite not taking too much personal interest in their children's education, nevertheless they did provide them with good schooling. Charles was something of a worry to his parents for he had a defect in his right foot which meant that he moved around only with difficulty. It was clear that this would present him with problems in finding a career. However he had a happy disposition and bore his disability with a cheerful smile.

حمید کاظم

تمرین ۳ : اگر $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ باشد، مجموعهٔ U در فضای R^4 چه فضایی را پوشش می‌دهد؟

$$u_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix} \quad u_2=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\\1\end{Bmatrix} \quad u_3=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\1\end{Bmatrix} \quad u_4=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\1\end{Bmatrix}$$

$$V=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\alpha_4 u_4$$

$$V=\begin{Bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\end{Bmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{matrix}$$

$(1)\rightarrow \alpha_1=V_1 \quad (5)$

$(2),(5)\rightarrow V_2=V_1+\alpha_2 \rightarrow \alpha_2=V_2-V_1 \quad (6)$

$(3),(6),(5)\rightarrow V_3=V_1+V_2-V_1+\alpha_3 \rightarrow \alpha_3=V_3-V_2 \quad (7)$

$(4),(5),(6),(7)\rightarrow V_4=V_1+V_2-V_1+V_3-V_2+\alpha_4 \rightarrow \alpha_4=V_4-V_3 \quad (8)$

$$\begin{cases}\alpha_1=V_1\\\alpha_2=V_2-V_1\\\alpha_3=V_3-V_2\\\alpha_4=V_4-V_3\end{cases}$$

به جای V_1, V_2, V_3, V_4 هر عددی قرار دهیم α_1 و α_2 و α_3 و α_4 بدست می‌آید. بنابراین مجموعه U تمام فضای R^4 را پوشش می‌دهد.

تمرین ۴ : از چهار بردار زیر ۳ بردار را پیدا کنید که مستقل خطی باشند.

$$u_1=\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix} \quad u_2=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \quad u_3=\begin{Bmatrix}1\\1\\2\end{Bmatrix} \quad u_4=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}$$

تعریف : $\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n=0 \xrightarrow[\text{است اگر}]{U\ \text{مستقل خطی}} \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_m=0$

۱) سعی اول $\left(U = \{u_1, u_2, u_3\} \right)$:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & (1) \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & (2) \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & (3) \end{cases} \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 = 0 \xrightarrow{(1)} 0 + \alpha_3 = 0$$

$$\rightarrow \alpha_3 = 0 \quad (4)$$

$$(2), (4) \rightarrow \alpha_2 = 0 \quad (5)$$

$$(1), (4), (5) \rightarrow \alpha_1 = 0$$

پس این مجموعه مستقل خطی است.

۲) سعی دوم $\left(U = \{u_2, u_3, u_4\} \right)$:

$$\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 & (1) \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 & (2) \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \rightarrow \alpha_4 = 0 \quad (5)$$

$$(1), (3) \rightarrow \alpha_3 = 0 \quad (6)$$

$$(1), (5), (6) \rightarrow \alpha_2 = 0$$

پس این مجموعه هم مستقل خطی است.

تمرین ۵ : استقلال خطی مجموعه $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ را به کمک دترمینان گرام کنترل نمائید.

$$u_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad u_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & (u_1, u_3) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & (u_2, u_3) \\ (u_3, u_1) & (u_3, u_2) & (u_3, u_3) \end{vmatrix}$$

$$(u, v) = \sum_{1}^{n} u_j \cdot v_j$$

حمید کاظم

$$G = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 9 \\ 2 & 30 & -13 \\ 9 & -13 & 13 \end{vmatrix} = 1028$$

پس مجموعه مستقل خطی است.

تمرین ۶ : اگر u_1 ، u_2 ، u_3 بصورت زیر تعریف شده باشند، آنگاه مجموعه بردارهای نرمال متعامد e_1 ، e_2 ، e_3 را بدست آورید.
(راهنمایی : در ابتدا شرایط استقلال خطی بررسی شود)

$$u_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad u_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} 11 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 121$$

پس مجموعه مستقل خطی است.

$$V_J = u_J - \sum_{k=1}^{J-1} (e_k , u_J)\, e_k \qquad e_J = \frac{u_J}{l(u_J)}$$

$$l(u_J) = \sqrt{(u_J , u_J)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_{Jk} \cdot u_{Jk}}$$

1) $\underline{J=1}$: $l(u_1) = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{11} = 3.32$

$$e_1 = \frac{u_1}{l(u_1)} = \begin{Bmatrix} -0.301 \\ 0.904 \\ 0.301 \end{Bmatrix}$$

2) $\underline{J=2}$: $V_2 = u_2 - (e_1 , u_2)\, e_1$

$= u_2 - (-0.301 * 1 + 0.904 * (-1) + 0.301 * 2)\, e_1$

$= u_2 - (-0.603)\, e_1$

$$V_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} + 0.603 \begin{Bmatrix} -0.301 \\ 0.904 \\ 0.301 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.818 \\ -0.455 \\ 2.182 \end{Bmatrix}$$

$$l(u_2) = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 2.45$$

$$e_2 = \frac{u_2}{l(u_2)} = \begin{Bmatrix} 0.408 \\ -0.408 \\ 0.816 \end{Bmatrix}$$

3) $\underline{J = 3}$ $\quad V_3 = u_3 - (e_1, u_3) e_1 - (e_2, u_3) e_2$

$$= u_3 - 1.808 e_1 - 0.408 e_2$$

$$V_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} - 1.808 \begin{Bmatrix} -0.301 \\ 0.904 \\ 0.301 \end{Bmatrix} - 0.408 \begin{Bmatrix} 0.408 \\ -0.408 \\ 0.816 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.378 \\ 0.532 \\ 0.123 \end{Bmatrix}$$

$$l(u_3) = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = 2.45$$

$$e_3 = \frac{u_3}{l(u_3)} = \begin{Bmatrix} -0.408 \\ 1.224 \\ 0.408 \end{Bmatrix}$$

حميد كاظم

ریاضیات عالی مهندسی

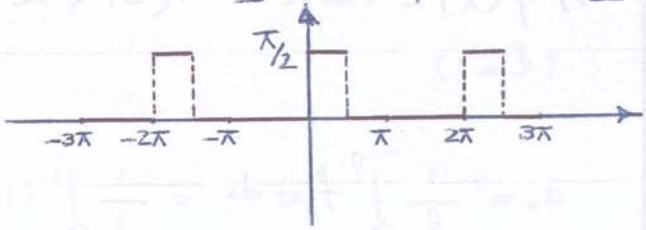
استاد : جناب آقای دکتر بهار

دانشجو : حمید کاظم(۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری ......چهارم......

تمرین ۸ : تابع متناوب زیر را در دامنه $[-\pi, \pi]$ بسط دهید و مقدار آن را در نقطه $x = \pi/2$ بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi/2 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad l = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \pi/2 \,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi/2\, x\right)_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi/2 \times \pi/2\right) = \pi/4$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} \longrightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n = 2,4,6,\dots \\ \frac{1}{2n} & n = 1,5,9,\dots \\ \frac{-1}{2n} & n = 3,7,11,\dots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-1}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} \longrightarrow b_n = \begin{cases} 0 & n = 1,3,5,\dots \\ \frac{-1}{2n} & n = 4,8,12,\dots \\ \frac{1}{2n} & n = 2,6,10,\dots \end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos nx + \left(\frac{-1}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx\right]$$

$$f(\pi/2) = \pi/4 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \sin\frac{n\pi}{2} \cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2n} \cos\frac{n\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2} \right] = \pi/4$$

تمرین ۸۹ توابع متناوب زیر را بصورت سری فوریه بنویسید.

1) $f(x) = 1 - x^2 \quad (-1 < x < 1)$

$(l = 1)$ تابع $f(x)$ تابع زوج است.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{1}{1}\int_0^1 (1-x^2)\,dx = (x - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = 2/3$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\cos n\pi x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \cos n\pi x\,dx - 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x\,dx$$

$$\int_0^1 \cos n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big]_0^1 = \cancel{\frac{1}{n\pi}\sin n\pi}^{\,0}$$

$$I_1 = \int_0^1 x^2 \cos n\pi x\,dx \longrightarrow \begin{cases} U = x^2 \to dU = 2x\,dx \\ dV = \cos n\pi x\,dx \to V = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{cases}$$

$$\to I_1 = \frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x - \int_0^1 \frac{2x}{n\pi}\sin n\pi x\,dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x \sin n\pi x\,dx \longrightarrow \begin{cases} U = x \to dU = dx \\ dV = \sin n\pi x \to V = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x \end{cases}$$

$$\to I_2 = \frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x + \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\,dx = \frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi x\Big]_0^1$$

$$= \frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x + \cancel{\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi}^{\,0}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{2x}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$$

$$\to a_n = \frac{-2x}{n\pi}\left(x \sin n\pi x + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2/3 + \sum_{1}^{\infty} \frac{-2x}{n\pi}\left(x \sin n\pi x + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\right)\cos n\pi x$$

۲) $f(x) = \frac{1}{2}\pi x^3 \qquad (-1 < x < 1) \qquad (l = 1)$

تابع $f(x)$ تابعی فرد است.

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\pi x^3 \sin n\pi x\,dx = \pi\int_0^1 x^3 \sin n\pi x\,dx$$

$$I_1 = \int_0^1 x^3 \sin n\pi x\,dx \longrightarrow \begin{cases} U = x^3 \to dU = \frac{1}{3}x^2 \\ dV = \sin n\pi x\,dx \to V = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x \end{cases}$$

$$\to I_1 = \frac{-x^3}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{3n\pi}\cos n\pi x\,dx = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi + \int_0^1 \frac{x^2}{3n\pi}\cos n\pi x\,dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 \cos n\pi x\,dx \longrightarrow \begin{cases} U = x^2 \to dU = \frac{1}{2}x \\ dV = \cos n\pi x\,dx \to V = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{cases}$$

$$\to I_2 = \cancel{\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x\Big]_0^1}^{\,0} - \int_0^1 \frac{x}{2n\pi}\sin n\pi x\,dx = -\int_0^1 \frac{x}{2n\pi}\sin n\pi x\,dx$$

$$I_3 = \int_0^1 x\sin n\pi x\,dx \longrightarrow \begin{cases} U = x \to dU = dx \\ dV = \sin n\pi x\,dx \to V = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x \end{cases}$$

$$\to I_3 = \frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\,dx = \frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^1 - \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi x\Big]_0^1$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi$$

$$b_n = \pi I_1$$

$$I_1 = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{3n\pi} I_2$$

$$I_2 = \frac{-1}{2n\pi} I_3$$

$$I_3 = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi$$

$$\to b_n = \pi\left[\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{6n^3\pi^3}\cos n\pi\right]$$

$$\to f(x) = \sum_1^\infty \pi\cos n\pi\left[\frac{1}{6n^3\pi^3} - \frac{1}{n\pi}\right]\sin n\pi x$$

٣) $f(x) = 2|x| \qquad (-2 < x < 2) \qquad (l=2)$

تابع $f(x)$ تابعی زوج است.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2|x|\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = 2$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 2|x|\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = 2\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \rightarrow v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow a_n = 2\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + 2\times\frac{2}{n\pi}\times\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{8}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

$$\rightarrow f(x) = 2 + \sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{2}\left[\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{8}{(n\pi)^2}\left(\cos n\pi/2 - 1\right)\right]$$

۴) $f(x) = \pi\sin\pi x \qquad (0 < x < 1) \qquad (l = 0.5)$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 \pi\sin\pi x\,dx = \frac{-\pi}{\pi}\cos\pi x\Big]_0^1 = -1(\cos\pi - \cos 0) = 2$$

$$a_n = \frac{1}{0.5}\int_0^1 \pi\sin\pi x\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(\sin((2n+1)\pi x) - \sin((2n-1)\pi x)\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{-1}{(2n+1)\pi}\cos(2n+1)\pi x + \frac{1}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{2n+1}\left(\cos(2n+1)\pi - 1\right) + \frac{1}{2n-1}\left(\cos(2n-1)\pi - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{2n+1}(-1-1) + \frac{1}{2n-1}(-1-1) = \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1} = \frac{-4}{4n^2-1}$$

$$b_n = \frac{1}{0.5}\int_0^1 \pi \sin \pi x \sin 2n\pi x \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(\cos((2n-1)\pi x) - \cos((2n+1)\pi x)\right) dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\pi x - \frac{1}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi x\right)\Big|_0^1 = 0$$

$$\longrightarrow f(x) = 2 + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-4}{4n^2-1}\right)\cos 2n\pi x$$

تمرین ۸ : تابع متناوب زیر را در دامنه $[-\pi,\pi]$ بسط دهید و مقدار آن را در نقطه $x=\pi/2$ بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(-1)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(+1)\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} -\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\left.-\sin nx\right]_0^{\pi/2} + \left.\sin nx\right]_{\pi/2}^{\pi}\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\left(-\sin\frac{n\pi}{2} + 0\right) + \left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} -\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\left.\cos nx\right]_0^{\pi/2} - \left.\cos nx\right]_{\pi/2}^{\pi}\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos 0\right) - \left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

حمید کاظم

$$= \frac{1}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx + \frac{1}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)\sin nx\right)$$

$$\Rightarrow f(\pi/2) = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}(-\cos n\pi - 1)\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}(-\cos n\pi - 1)\sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(-2\sin^2\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\left(\sin^3\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin^3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin^3\pi + \frac{1}{3}\sin^3\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin^3 2\pi + \frac{1}{5}\sin^3\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{6}\sin^3 3\pi + \frac{1}{7}\sin^3\frac{7\pi}{2} + \cdots\right.$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right]$$

تمرین ۷) در توابع اشتورم ـ لیوویل ثابت کنید برای دو λ_i و λ_j متفاوت شرط تعامد برقرار است.

(راهنمایی: باید نشان دهیم که $\int_a^b p(x) * y_i * y_j * dx = (y_i , y_j)_{p(x)} = 0$)

حل: اگر λ_i و y_i ، λ_j و y_j دو جواب متفاوت از مسأله اشتورم ـ لیوویل باشند داریم:

$$\begin{cases} y_j\left[(r(x)\, y_i')' + (q(x) + \lambda_i p(x)) y_i \right] = 0 & (1) \\ y_i\left[(r(x)\, y_j')' + (q(x) + \lambda_j p(x)) y_j \right] = 0 & (2) \end{cases}$$

معادله (1) را از معادله (2) کم می‌کنیم:

$$(r(x)\, y_j')' y_i + \cancel{q(x)\, y_j y_i} + (\lambda_j p(x)) y_j y_i - (r(x)\, y_i')' y_j - \cancel{q(x)\, y_i y_j} - (\lambda_i p(x)) y_i y_j = 0$$

$$\longrightarrow \quad (\lambda_j - \lambda_i)\, p(x) \cdot y_i y_j = (r(x)\, y_i')' y_j - (r(x)\, y_j')' y_i \qquad (3)$$

از دو طرف رابطه (3) انتگرال می‌گیریم:

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b p(x)\, y_i\, y_j\, dx = \int_a^b \left[(r(x)\, y_i')' y_j - (r(x)\, y_j')' y_i \right] dx \qquad (4)$$

طرف راست رابطه (4) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_a^b \left[(r(x)\, y_i')' y_j - (r(x) y_j')' y_i + r(x)\, y_i' y_j' - r(x)\, y_i' y_j' \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(r(x)\, y_i\, y_j' - r(x)\, y_j\, y_i' \right) \right] dx$$

$$= \left[r(x)\, y_i\, y_j' - r(x)\, y_j\, y_i' \right]_a^b$$

$$= \left[r(b)\left(y_i(b)\, y_j'(b) - y_j(b)\, y_i'(b) \right) - r(a)\left(y_i(a)\, y_j'(a) - y_j(a)\, y_i'(a) \right) \right] \qquad (5)$$

شرائط مرزی را بصورت زیر اعمال می کنیم. همانطورکه می دانیم:

$$\begin{cases} k_1 y_i(a) + k_2 y_i'(a) = 0 \\ k_1 y_j(a) + k_2 y_j'(a) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 r(a)\, y_j(a)\, y_i(a) + k_2 r(a)\, y_j(a)\, y_i'(a) = 0 \\ k_1 r(a)\, y_i(a)\, y_j(a) + k_2 r(a)\, y_i(a)\, y_j'(a) = 0 \end{cases}$$

دو رابطه را از هم کم می کنیم خواهیم داشت:

$$k_2\, r(a)\left(y_i(a)\, y_j'(a) - y_j(a)\, y_i'(a) \right) = 0 \qquad (6)$$

به همین ترتیب برای نقطه $x = b$ نیز خواهیم داشت:

$$k_2\, r(b)\left(y_i(b)\, y_j'(b) - y_j(b)\, y_i'(b) \right) = 0 \qquad (7)$$

از دو رابطه (6) و (7) به این نتیجه می رسیم که رابطه (5) برابر صفر است. بنابراین:

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b p(x)\, y_i\, y_j\, dx = 0$$

چون λ_i و λ_j دو مقدار متفاوت هستند:

$$\int_a^b p(x)\, y_i\, y_j\, dx = (y_i, y_j)_{p(x)} = 0$$

ریاضیات عالی مهندسی

استاد : جناب آقای دکتر بهار

دانشجو : حمید کاظم(۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری .... پنجم

تمرین ۱۰: بسط‌های نیم دامنه و یک چهارم دامنه توابع زیر را محاسبه نمایید.

1) $f(x) = \sin x \qquad 0 < x < \pi/2 \qquad \longrightarrow \quad l = \pi/2$

1_1) HRC: $f(x) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\cos x\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(-\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos 0\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[\sin(2nx+x) + \sin(x-2nx)\right]dx$$

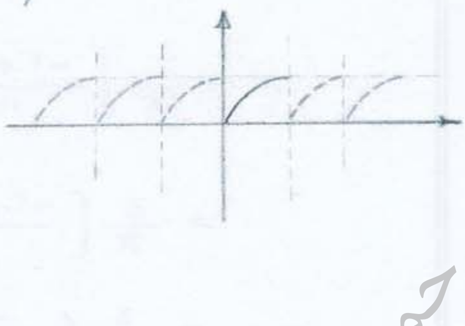
$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)\right]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos((2n+1)x)}{2n+1} - \frac{-\cos((2n-1)x)}{2n-1}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\left(-\cancel{\cos(2n+1)\tfrac{\pi}{2}}^{\,0} + \cos 0\right) - \frac{1}{2n-1}\left(-\cancel{\cos(2n-1)\tfrac{\pi}{2}}^{\,0} + \cos 0\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{4n^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\left(1 + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-2}{4n^2-1}\right)\cos 2nx\right)$$



1_2) HRS: $f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

حمید کاظم

$$b_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin x \,\sin\frac{n\pi x}{\pi/2}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \,\sin 2nx\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\left[\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x\right]dx$$

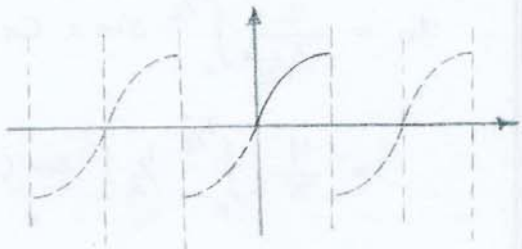
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} - \sin 0}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} - \sin 0}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}\right]$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{4n}{4n^2-1}\right) & \text{فردي } n \\ \frac{2}{n}\left(\frac{-4n}{4n^2-1}\right) & \text{زوجي } n \end{cases} \longrightarrow b_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{8n}{(4n^2-1)\pi}\right)$$

$$f(x) = \sum_{1}^{n} (-1)^n \left(\frac{8n}{(4n^2-1)\pi}\right)\sin 2nx$$



1-3) QRC : $f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2l}$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2l}\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos nx\,dx$$

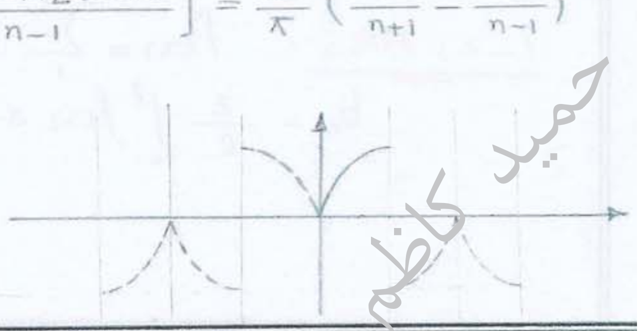
$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\left[\sin(n+1)x + \sin(1-n)x\right]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)\frac{\pi}{2} \xrightarrow{} 0 + \cos 0}{n+1} - \frac{-\cos(n-1)\frac{\pi}{2} \xrightarrow{} 0 + \cos 0}{n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{n^2-1}\right)$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{-4}{(n^2-1)\pi}\right)\cos nx$$



حميد كاظم

1-4) QRS: $f(x)=\sum_{n=1,3,5}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2l}$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{2l}\,dx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\ \sin nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}\left[\cos(n-1)x-\cos(n+1)x\right]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\pi/2-0}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\pi/2-0}{n+1}\right]$$

$$n=2k+1 \rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin k\pi}{n-1}-\frac{\sin(k+1)\pi}{n-1}\right]=0$$

$$\rightarrow f(x)=0$$

2) $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<\pi\\ 0 & \pi<x<2\pi\end{cases}$ $\quad l=2\pi$

2-1) HRC:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{2\pi}(-\cos x)\Big]_0^{\pi}=\frac{-\cos\pi+\cos 0}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\frac{n\pi x}{2\pi}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\frac{nx}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\tfrac{1}{2}\left[\sin(\tfrac{n}{2}+1)x+\sin(1-\tfrac{n}{2})x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(\tfrac{n}{2}+1)x-\sin(\tfrac{n}{2}-1)x\right]dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(\frac{n}{2}+1)x}{\frac{n}{2}+1}-\frac{-\cos(\frac{n}{2}-1)x}{\frac{n}{2}-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(\frac{n}{2}+1)\pi+\cos 0}{\frac{n}{2}+1}+\frac{+\cos(\frac{n}{2}-1)\pi-\cos 0}{\frac{n}{2}-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\frac{n}{2}\pi+1}{\frac{n}{2}+1}+\frac{-\cos\frac{n\pi}{2}-1}{\frac{n}{2}-1}\right]=\frac{1}{\pi}(\cos\frac{n\pi}{2}+1)\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}\right)$$

حمید کاظم

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{-4}{n^2-4}\right) & \text{فرد } n \\ 0 & n=2,6,10,\dots \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{-8}{n^2-4}\right) & n=4,8,12,\dots \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\left[1 + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{-4}{n^2-4} \cos\frac{n}{2}x + \sum_{n=4,8,12}^{\infty} \frac{-8}{n^2-4} \cos\frac{n}{2}x\right]$$

2-2) HRS :

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin\frac{n\pi x}{2\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin\frac{nx}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)x - \cos\left(\frac{n}{2}+1\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\frac{n}{2}-1)x}{\frac{n}{2}-1} - \frac{\sin(\frac{n}{2}+1)x}{\frac{n}{2}+1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\frac{n}{2}-1)\pi - 0}{\frac{n}{2}-1} - \frac{\sin(\frac{n}{2}+1)\pi - 0}{\frac{n}{2}+1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\sin(\frac{n\pi}{2})}{n-2} + \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n+2}\right] = \frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2}\right)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi}\left(\frac{-4}{n^2-4}\right) & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi}\left(\frac{-4}{n^2-4}\right) \sin\frac{nx}{2}$$

2-3) QRC :

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos\frac{n\pi x}{4\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos\frac{nx}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n}{4}+1\right)x + \sin\left(1-\frac{n}{4}\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(\frac{n}{4}+1\right)x - \sin\left(\frac{n}{4}-1\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(\frac{n}{4}+1)x}{\frac{n}{4}+1} - \frac{-\cos(\frac{n}{4}-1)x}{\frac{n}{4}-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(\frac{n}{4}+1)\pi + \cos 0}{\frac{n}{4}+1} - \frac{-\cos(\frac{n}{4}-1)\pi + \cos 0}{\frac{n}{4}-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\frac{n\pi}{4}+1}{\frac{n}{4}+1} - \frac{\cos\frac{n\pi}{4}+1}{\frac{n}{4}-1}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+1\right)\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n-4}\right)$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{-16}{(n^2-16)\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+1\right)\cos\frac{nx}{4}$$

2-4) QRS :

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin\frac{nx}{4}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin\frac{nx}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(\frac{n}{4}-1)x - \cos(\frac{n}{4}+1)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\frac{n}{4}-1)x}{\frac{n}{4}-1} - \frac{\sin(\frac{n}{4}+1)x}{\frac{n}{4}+1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\frac{n}{4}-1)\pi - 0}{\frac{n}{4}-1} - \frac{\sin(\frac{n}{4}+1)\pi - 0}{\frac{n}{4}+1}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\sin(\frac{n\pi}{4})}{n-4} - \frac{-\sin(\frac{n\pi}{4})}{n+4}\right] = \frac{2}{\pi}\sin(\frac{n\pi}{4})\left(\frac{-1}{n-4} + \frac{1}{n+4}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{-16}{\pi(n^2-16)}\sin(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{nx}{4})$$

3) $f(x) = x+2 \qquad 0<x<3 \qquad (l=3)$

3-1) HRC :

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 (x+2)\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)_0^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}+6\right) = \frac{3}{2}+2$$
$$= 3.5$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (x+2)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$\begin{cases} U = x+2 \rightarrow dU = dx \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{3}dx \rightarrow v = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{3}\left[\frac{3(x+2)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big]_0^3 - \int_0^3 \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{3(3+2)}{n\pi}\cancel{\sin(n\pi)}^{\,0} - 0\right) - \left(\frac{3}{n\pi}\right)^2\left(-\cos\frac{n\pi x}{3}\right)_0^3\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{3}{n\pi}\right)^2(\cos(n\pi) - \cos 0)\right] = \frac{6}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{-12}{(n\pi)^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{7}{2} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{-12}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{3}$$

3-2) HRS :

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (x+2)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$\begin{cases} U = (x+2) \rightarrow dU = dx \\ dV = \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx \rightarrow V = \frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{3}\left[\frac{-3(x+2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big]_0^3 - \int_0^3 \frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{-3(3+2)}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) + \left(\frac{3}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big]_0^3\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{-15}{n\pi}(\cos n\pi - 1) + \left(\frac{3}{n\pi}\right)^2(\cancel{\sin n\pi}^{\,0} - 0)\right]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{20}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{20}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}$$

3-3). QRC :

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (x+2)\cos\frac{n\pi x}{6}\,dx$$

$$\begin{cases} U = x+2 \rightarrow dU = dx \\ dV = \cos\frac{n\pi x}{6}\,dx \rightarrow V = \frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{6} \end{cases}$$

حميد كاظم

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{3}\left[\frac{6(x+2)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{6}\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{6}\,dx\Big]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{6(3+2)}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-0\right) - \left(\frac{6}{n\pi}\right)^2\left(-\cos\frac{n\pi x}{6}\right)_0^3\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{30}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{6}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos 0\right)\right]$$

$$n=1,3,5 \rightarrow a_n = \frac{2}{3}\left[\frac{30}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{36}{(n\pi)^2}(0-1)\right]$$

$$= \frac{20}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{24}{(n\pi)^2}$$

$$= \frac{20(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} - \frac{24}{(n\pi)^2}$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{20(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} - \frac{24}{(n\pi)^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{6}$$

3_4) QRS

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (x+2)\sin\frac{n\pi x}{6}\,dx$$

$$\begin{cases} u = x+2 \rightarrow du = dx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{6}\,dx \rightarrow v = \frac{-6}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{3}\left[\frac{-6(x+2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{6}\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{-6}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{6}\,dx\Big]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{-6(3+2)}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos 0\right) + \left(\frac{6}{n\pi}\right)^2\left[\sin\frac{n\pi x}{6}\right]_0^3\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{-30}{n\pi}(0-1) + \left(\frac{6}{n\pi}\right)^2\left(\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right)\right]$$

$$= \frac{20}{n\pi} + \frac{24}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \xrightarrow{n=1,3,5,\dots} b_n = \frac{20}{n\pi} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{24}{(n\pi)^2}$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{20}{n\pi} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{24}{(n\pi)^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{6}$$

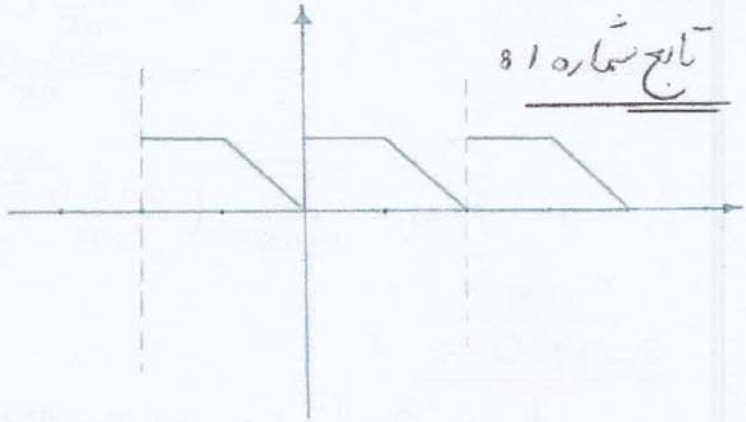
حميد كاظم

تمرین ۱۱: تابع نیروی $F(t)$ تابعی تناوبی است. با فرض $m=1$, $k=1$ معادله زیر را برای دو حالت حل نمایید.

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

$$1)\ F(t) = \begin{cases} 5 \quad (\text{ton}) & 0 < t \leq 1 \\ 10-5t \quad (\text{ton}) & 1 < t \leq 2 \end{cases} \qquad 2)\ F(t) = \begin{cases} 20 & 0 \leq t < 2 \\ 10 & 2 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t < 6 \end{cases}$$

تابع شماره ۱:



۱) در ابتدا بسط فوریه تابع $F(t)$ را می‌نویسیم:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi t}{\ell}\right) \qquad \ell = 2/2 = 1$$

$$* \ a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_0^2 F(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 5\,dt + \int_1^2 (10-5t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(5t\Big]_0^1 + \left(10t + \frac{5}{2}t^2\right)\Big]_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(5\times1 - 0) + \left(\left(10\times2 + \frac{5}{2}\times2^2\right) - \left(10\times1 + \frac{5}{2}\times1\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(5 + \frac{35}{2}\right) = \frac{45}{4}$$

$$* \ a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^2 F(t)\cos\frac{n\pi t}{\ell}\,dt = \frac{1}{1}\left(\int_0^1 5\cos n\pi t\,dt + \int_1^2 (10-5t)\cos n\pi t\,dt\right)$$

$$= \frac{5}{n\pi}\sin n\pi t\Big]_0^1 + \frac{10}{n\pi}\sin n\pi t\Big]_1^2 - 5\int_1^2 t\cos n\pi t\,dt$$

$$I_1 = \int_1^2 t\cos n\pi t\,dt$$

$$\begin{cases} u = t \to du = dt \\ dv = \cos n\pi t\,dt \to v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \end{cases}$$

حمید کاظمی

$$I_1 = \frac{t}{n\pi} \sin n\pi t \Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \, dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(2\cancel{\sin 2n\pi} - \cancel{\sin n\pi}\right) - \frac{1}{(n\pi)^2}\left(-\cos n\pi t\right)_1^2$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}\left(\cos 2n\pi - \cos n\pi\right)$$

$$\rightarrow a_n = \frac{5}{n\pi}\left(\cancel{\sin n\pi} - \cancel{\sin 0}\right) + \frac{10}{n\pi}\left(\cancel{\sin 2n\pi} - \cancel{\sin n\pi}\right) - \frac{5}{(n\pi)^2}\left(\cos 2n\pi - \cos n\pi\right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ -\dfrac{10}{(n\pi)^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$* \; b_n = \frac{1}{l}\int_0^2 F(t) \sin\frac{n\pi t}{l} \, dt = \frac{1}{1}\left(\int_0^1 5 \sin n\pi t \, dt + \int_1^2 (10-5t) \sin n\pi t \, dt\right)$$

$$= \frac{-5}{n\pi} \cos n\pi t \Big]_0^1 + \frac{-10}{n\pi} \cos n\pi t \Big]_1^2 - 5\int_1^2 t \sin n\pi t \, dt$$

$$I_2 = \int_1^2 t \sin n\pi t \, dt$$

$$\begin{cases} U = t \rightarrow dU = dt \\ dV = \sin n\pi t \, dt \rightarrow V = \dfrac{-1}{n\pi} \cos n\pi t \end{cases}$$

$$\rightarrow I_2 = \frac{-t}{n\pi} \cos n\pi t \Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{n\pi} \cos n\pi t \, dt$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left(2\cos 2n\pi - \cos n\pi\right) + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin n\pi t \Big]_1^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left(2\cos 2n\pi - \cos n\pi\right) + \frac{1}{(n\pi)^2}\left(\cancel{\sin 2n\pi} - \cancel{\sin n\pi}\right)$$

$$\rightarrow b_n = \frac{-5}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) - \frac{10}{n\pi}\left(\cos 2n\pi - \cos n\pi\right) + \frac{5}{n\pi}\left(2\cos 2n\pi - \cos n\pi\right)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{5}{n\pi}(2-1) = \dfrac{5}{n\pi} & n \text{ زوج} \\ \dfrac{-5}{n\pi}(-1-1) - \dfrac{10}{n\pi}(1-(-1)) + \dfrac{5}{n\pi}(2-(-1)) = \dfrac{5}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

حميد كاظم

$$\Rightarrow F(t) = \frac{45}{4} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{-10}{(n\pi)^2}\cos n\pi t + \frac{5}{(n\pi)}\sin n\pi t\right) + \sum_{n=2,4,6}^{\infty}\frac{5}{n\pi}\sin n\pi t$$

$$x = a'_0 + \sum a'_n \cos n\pi t + b'_n \sin n\pi t$$

$$\dot{x} = \sum a'_n(-n\pi \sin n\pi t) + b'_n(n\pi \cos n\pi t)$$

$$\ddot{x} = \sum a'_n(-(n\pi)^2 \cos n\pi t) + b'_n(-(n\pi)^2 \sin n\pi t)$$

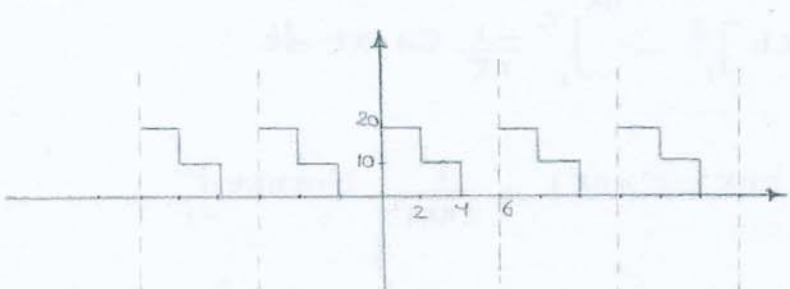
$$1\times\ddot{x} + 1\times x = F(t)$$

$$\Rightarrow \sum(-a'_n(n\pi)^2)\cos n\pi t + \sum(-b'_n(n\pi)^2)\sin n\pi t + a'_0 + \sum a'_n \cos n\pi t + \sum b'_n \sin n\pi t = F(t)$$

$$\Rightarrow \sum a'_n(1-(n\pi)^2)\cos n\pi t + \sum b'_n(1-(n\pi)^2)\sin n\pi t + a'_0 = \sum_{n=1,3,5}\left(\frac{-10}{(n\pi)^2}\right)\cos n\pi t + \sum \frac{5}{n\pi}\sin n\pi t + \frac{45}{4}$$

$$\begin{cases} a'_n(1-(n\pi)^2) = \dfrac{-10}{(n\pi)^2} \Rightarrow a'_n = \dfrac{-10}{(n\pi)^2(1-(n\pi)^2)} \\[2ex] b'_n(1-(n\pi)^2) = \dfrac{5}{n\pi} \Rightarrow b'_n = \dfrac{5}{n\pi(1-(n\pi)^2)} \\[2ex] a'_0 = 45/4 \end{cases}$$

تابع شماره ۲:



$$\ell = 6/2 = 3$$

$$* \; a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_0^6 F(t)\,dt = \frac{1}{6}\left(\int_0^2 20\,dt + \int_2^4 10\,dt + 0\right) = \frac{1}{6}\left(20t\Big]_0^2 + 10t\Big]_2^4\right)$$

$$= \frac{1}{6}(20\times 2 + 10\times 2) = 10$$

$$* \; a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^6 F(t)\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\left[\int_0^2 20\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt + \int_2^4 10\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt\right]$$

$$= \frac{3}{3n\pi}\left[20\sin\frac{n\pi t}{3}\Big]_0^2 + 10\sin\frac{n\pi t}{3}\Big]_2^4\right]$$

حمید کاظم

$$= \frac{1}{n\pi}\left[20\left(\sin\frac{2n\pi}{3} - \sin 0\right) + 10\left(\sin\frac{4n\pi}{3} - \sin\frac{2n\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(10\sin\frac{2n\pi}{3} + 10\sin\frac{4n\pi}{3}\right) = \frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\right)$$

$$* \; b_n = \frac{1}{l}\int_0^6 F(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt = \frac{1}{3}\left[\int_0^2 20\sin\frac{n\pi t}{3}\,dt + \int_2^4 10\sin\frac{n\pi t}{3}\,dt\right]$$

$$= \frac{3}{3n\pi}\left[-20\cos\frac{n\pi t}{3}\Big]_0^2 - 10\cos\frac{n\pi t}{3}\Big]_2^4 \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-20\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos 0\right) - 10\left(\cos\frac{4n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-10\cos\frac{2n\pi}{3} - 10\cos\frac{4n\pi}{3} + 20\right] = \frac{10}{n\pi}\left[2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow F(t) = 10 + \sum\left[\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi t}{3} + \frac{10}{n\pi}\left(2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi t}{3}\right]$$

$$x = a'_0 + \sum a'_n \cos\frac{n\pi t}{3} + b'_n \sin\frac{n\pi t}{3}$$

$$\dot{x} = \sum a'_n\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi t}{3} + b'_n\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi t}{3}$$

$$\ddot{x} = \sum -a'_n\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2\cos\frac{n\pi t}{3} - b'_n\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$1\times\ddot{x} + 1\times x = F(t)$$

$$\Rightarrow a'_0 + \sum a'_n\left(1 - \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2\right)\cos\frac{n\pi t}{3} + \sum b'_n\left(1 - \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2\right)\sin\frac{n\pi t}{3} =$$
$$10 + \sum\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi t}{3} + \sum\frac{10}{n\pi}\left(2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi t}{3}$$

$$\begin{cases} a'_0 = 10 \\[2ex] a'_n = \dfrac{10\left(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\right)}{n\pi\left(1 - \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2\right)} \\[3ex] b'_n = \dfrac{10\left(2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\right)}{n\pi\left(1 - \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2\right)} \end{cases}$$

حميد كاظم

ریاضیات عالی مهندسی

استاد : جناب آقای دکتر بهار

دانشجو : حمید کاظم(۸۸۱۲۴۰۷۹)

تمرین سری ششم

تمرین ۱۲: توابع زیر را با سری فوریه مختلط محاسبه نمایید.

1) $f(x) = e^{-x} \qquad -3 < x < +3$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \longrightarrow c_n = \frac{1}{2\times 3}\int_{-3}^{3} f(x) e^{-inx} dx$$

$$\longrightarrow c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} e^{-x} e^{-inx} dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} e^{-x(1+in)} dx = \frac{-1}{6}\frac{e^{x(1+in)}}{(1+in)}\Big]_{-3}^{3}$$

$$= \frac{-1}{6(1+in)}\left(e^{3(1+in)} - e^{-3(1+in)}\right) = \frac{-1}{6(1+in)}\left(e^{3}e^{3in} - e^{-3}e^{-3in}\right)$$

$$= \frac{-(1-in)}{6(1+in)(1-in)}\left(e^{3}e^{3in} - e^{-3}e^{-3in}\right) = \frac{-(1-in)}{6(1+n^2)}\left(e^{3}e^{3in} - e^{-3}e^{-3in}\right)$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-(1-in)}{6(1+n^2)}\left(e^{3}e^{3in} - e^{-3}e^{-3in}\right)e^{inx} \qquad e^{\pm 3in} = \cos 3n \pm i\sin 3n$$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-(1-in)}{6(1+n^2)}\left[e^{3}(\cos 3n + i\sin 3n) - e^{-3}(\cos 3n - i\sin 3n)\right]e^{inx}$$

$-3 < x < +3$

2) $f(x) = 6\sin x \qquad$ for all x

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 6\sin x\, e^{-inx} dx = \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, e^{-inx} dx$$

$$= \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)e^{-inx} dx = \frac{-3i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{ix(1-n)} - e^{-ix(1+n)}\right)dx$$

$$= \frac{-3i}{2\pi}\left(\frac{e^{ix(1-n)}}{i(1-n)} - \frac{e^{-ix(1+n)}}{-i(1+n)}\right)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-3}{2\pi}\left(\frac{e^{ix(1-n)}}{1-n} + \frac{e^{-ix(1+n)}}{1+n}\right)\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-3}{2\pi}\left[\left(\frac{e^{i\pi(1-n)}}{1-n} + \frac{e^{-i\pi(1+n)}}{1+n}\right) - \left(\frac{e^{-i\pi(1-n)}}{1-n} + \frac{e^{i\pi(1+n)}}{1+n}\right)\right]$$

$$= \frac{-3}{2\pi}\left[\left(\frac{e^{i\pi(1-n)} - e^{-i\pi(1-n)}}{1-n}\right) + \left(\frac{e^{-i\pi(1+n)} - e^{i\pi(1+n)}}{1+n}\right)\right]$$

$$= \frac{-3}{2\pi}\left[\frac{-2\sin\pi(1-n)}{i(1-n)} + \frac{2\sin\pi(1+n)}{i(1+n)}\right] = 0$$

$$\rightarrow f(x) = \sum 0 \times e^{inx} = 0$$

۳) $$f(x) = \begin{cases} -100 & -5 < x < 0 \\ +100 & 0 < x < 5 \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{2\times 5}\int_{-5}^{5} f(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{10}\int_{-5}^{0} -100\,e^{-inx}\,dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{5} 100\,e^{-inx}\,dx$$

$$= -10\int_{-5}^{0} e^{-inx}\,dx + 10\int_{0}^{5} e^{-inx}\,dx = -10\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)_{-5}^{0} + 10\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)_{0}^{5}$$

$$= \frac{10}{in}\left(e^{0} - e^{i5n}\right) - \frac{10}{in}\left(e^{-i5n} - e^{0}\right) = \frac{10}{in}\left(\cancel{e^{0}} - e^{i5n} - e^{-i5n} + \cancel{e^{0}}\right)$$

$$= \frac{10i}{-n}\left(-e^{i5n} - e^{-i5n}\right) = \frac{10i}{n}(2\cos 5n)$$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{20i}{n}(\cos 5n)\,e^{inx}$$

۴) $f(x) = 4 - 5\cos 2x$ (for all x)

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4 - 5\cos 2x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 4e^{-inx}\,dx}^{C_{n_1}} - \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 5\cos 2x\,e^{-inx}\,dx}^{C_{n_2}}\Big]$$

$$C_{n_1} = \frac{4e^{-inx}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4i}{n}\left(e^{-in\pi} - e^{+in\pi}\right) = \frac{4i}{n}(2\cos n\pi) = \frac{8(-1)^n i}{n}$$

$$C_{n_2} = -5\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,e^{-inx}\,dx$$

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\, e^{-inx}\,dx \longrightarrow \begin{cases} u=e^{-inx} \longrightarrow du=-in\,e^{-inx}\,dx \\ dv=\cos 2x\,dx \longrightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$\longrightarrow I_1=\frac{1}{2}e^{-inx}\sin 2x\Big]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x(-in)\,e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-in\pi}\cancelto{0}{\sin 2\pi}-e^{+in\pi}\cancelto{0}{\sin(-2\pi)}\right)+\frac{in}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\, e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{in}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\, e^{-inx}\,dx$$

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\, e^{-inx}\,dx \longrightarrow \begin{cases} u=e^{-inx} \longrightarrow du=-in\,e^{-inx}\,dx \\ dv=\sin 2x\,dx \longrightarrow v=\frac{-1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

$$\longrightarrow I_2=\frac{-1}{2}e^{-inx}\cos 2x\Big]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-1}{2}\cos 2x\, e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{-1}{2}\left(e^{-in\pi}\cos 2\pi-e^{in\pi}\cos 2\pi\right)+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\, e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{-1}{2}\left(e^{-in\pi}-e^{in\pi}\right)+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\, e^{-inx}\,dx=\cancelto{0}{\frac{\sin n\pi}{i}}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\, e^{-inx}\,dx$$

$$\longrightarrow I_1=\frac{in}{2}I_2=\frac{in}{2}\left(\frac{1}{2}I_1\right) \longrightarrow I_1\left(1-\frac{in}{4}\right)=0$$

$$\longrightarrow I_1=0$$

تمرین ۱۳: اگر تابع $f(x)$ یک تابع زوج باشد، نشان دهید به ازای $a>0$ داریم:

$$1)\quad f(ax) = \frac{1}{a}\int_0^\infty A(\omega/a)\cos\omega x\, d\omega$$

$$2)\quad x f(x) = \int_0^\infty B^*(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad , \quad B^*(\omega) = \frac{-d}{d\omega}A(\omega)$$

$$3)\quad x^2 f(x) = \int_0^\infty A^*(\omega)\cos\omega x\, d\omega \quad , \quad A^*(\omega) = \frac{-d^2}{d\omega^2}A(\omega)$$

انتگرال فوریه تابع زوج به صورت مقابل است:

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega$$

$$\rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos\omega v\, dv$$

حل ۱:

$$f(ax) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega a)x\, d\omega$$

با تغییر متغیر $\frac{\omega}{a}$ به جای ω خواهیم داشت:

$$f(ax) = \int_0^\infty A\left(\frac{\omega}{a}\right)\cos\left(\frac{\omega}{a}\times a\right)x\, d\frac{\omega}{a}$$

$$= \int_0^\infty A(\omega/a)\cos\omega x\,(1/a\, d\omega) = \frac{1}{a}\int_0^\infty A(\omega/a)\cos\omega x\, d\omega$$

حل ۲:

$$g(x) = x f(x)$$

$f(x)$ زوج $\rightarrow f(x) = f(-x)$

$$g(-x) = -x f(-x) = -(x f(-x)) = -(x f(x)) = -g(x)$$

پس $g(x) = x f(x)$ تابعی فرد است. بنابراین

$$g(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad , \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(v)\sin\omega v\, dv$$

$$\rightarrow B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty v f(v)\sin\omega v\, dv$$

$$\int B(\omega)\, d\omega = \int \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty v f(v)\sin\omega v\, dv\right] d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty v f(v)\left(\frac{-1}{v}\cos\omega v\right) dv$$

$$= \frac{-2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos\omega v\, dv = -A(\omega)$$

$$\Rightarrow B(\omega) = \frac{-d}{d\omega}A(\omega) \Rightarrow g(x) = \int_0^\infty \left(\frac{-d}{d\omega}A(\omega)\right)\sin\omega x\, d\omega$$

$$\Rightarrow x f(x) = \int_0^\infty B^*(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad , \quad B^*(\omega) = \frac{-d}{d\omega}A(\omega)$$

حل ۸٫۳

$h(x) = x^2 f(x)$

$h(x) = h(-x) \longrightarrow$ تابعی زوج است h

$h(x) = \int_0^\infty A^*(\omega) \cos\omega x \, d\omega \quad , \quad A^*(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty h(v) \cos\omega v \, dv$

$\int A^*(\omega)\, d\omega = \int \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty h(v) \cos\omega v \, dv\right] d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{v} h(v) \cos\omega v \, dv$

$\iint A^*(\omega)\, d\omega^2 = \int \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{1}{v} h(v) \cos\omega v \, dv\right] d\omega = \frac{-2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{v^2} h(v) \cos\omega v \, dv$

$= \frac{-2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{v^2} v^2 f(v) \cos\omega v \, dv = -A(\omega)$

$\Longrightarrow A^*(\omega) = \frac{-d^2}{d\omega^2} A(\omega)$

$\Longrightarrow x^2 f(x) = \int_0^\infty A^*(\omega) \cos\omega x \, d\omega \quad , \quad A^*(\omega) = \frac{-d^2}{d\omega^2} A(\omega)$

تمرین ۸٫۱۴ توابع زیر را به کمک تبدیل سینوسی حل نمایید.

1) $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\hat{f}_s(\omega) = F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x) \sin\omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x e^{\frac{-x^2}{2}} \sin\omega x \, dx$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x e^{\frac{-x^2}{2}}\left(\frac{-i}{2}\left(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}\right)\right) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \left(x e^{\frac{-x^2}{2}+i\omega x} - x e^{\frac{-x^2}{2}-i\omega x}\right) dx$

$I_1 = \int_0^\infty x e^{\frac{-x^2}{2}+i\omega x} dx \longrightarrow \begin{cases} u = e^{i\omega x} \longrightarrow du = i\omega e^{i\omega x} dx \\ dv = x e^{-x^2/2} dx \longrightarrow v = -e^{-x^2/2} \end{cases}$

$I_1 = -e^{-x^2/2+i\omega x}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty i\omega e^{-x^2/2+i\omega x} dx = -(0 - e^0) + \frac{i\omega e^{-x^2/2+i\omega x}}{-x+i\omega}\Big]_0^\infty$

$= 1 + i\omega\left(0 - \frac{e^0}{i\omega}\right) = 0$

$I_2 = \int_0^\infty x e^{\frac{-x^2}{2}-i\omega x} dx \longrightarrow \begin{cases} u = e^{-i\omega x} \longrightarrow du = -i\omega e^{-i\omega x} dx \\ dv = x e^{-x^2/2} dx \longrightarrow v = -e^{-x^2/2} \end{cases}$

$I_2 = -e^{-x^2/2-i\omega x}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty i\omega e^{-x^2/2-i\omega x} dx = -(0 - e^0) - \frac{i\omega e^{-x^2/2-i\omega x}}{-x-i\omega}\Big]_0^\infty$

$= 1 - \left(0 - \frac{i\omega e^0}{-i\omega}\right) = 1 - 1 = 0$

$\Longrightarrow \hat{f}_s(\omega) = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < a \\ 0 & \text{نقاط دیگر} \end{cases}$

$$\hat{f}_s(\omega) = F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin\omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin x \sin \omega x \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{1}{2}\left[\cos(x - \omega x) - \cos(x + \omega x)\right] dx = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^a \left(\cos(\omega - 1)x - \cos(\omega + 1)x\right) dx$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[\frac{\sin(\omega-1)x}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega+1)x}{\omega+1}\right]_0^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(\omega-1)a}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)a}{\omega+1}\right]$$

تمرین ها : توابع زیر را به کمک تبدیل کسینوسی حل نمایید.

1) $f(x) = e^{-x^2/2}$

$$\hat{f}_c(\omega) = F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2} \left(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left(e^{\frac{-x^2}{2} + i\omega x} + e^{-\frac{x^2}{2} - i\omega x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2} + i\omega x}}{-x + i\omega} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2} - i\omega x}}{-x - i\omega}\right)\Bigg]_0^\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2} + i\omega x}}{-x + i\omega}\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2} - i\omega x}}{-x - i\omega}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - \left(\frac{e^0}{i\omega} + \frac{e^0}{-i\omega}\right)\right) = 0$$

۲) $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < a \\ 0 & \text{نقاط دیگر} \end{cases}$

$$f_c(\omega) = F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos x \cos \omega x \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{1}{2} \left[\cos(\omega+1)x + \cos(\omega-1)x \right] dx = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[\frac{\sin(\omega+1)x}{\omega+1} + \frac{\sin(\omega-1)x}{\omega-1} \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(\omega+1)a}{\omega+1} + \frac{\sin(\omega-1)a}{\omega-1} \right]$$